ウェーブレット変換法と微積分方程式による カラー画像の圧縮および再現性について

遠藤　久○、早野誠治、斎藤兆古 (法政大学工学部)、

國井利泰 (法政大学計算科学センター)

A Comparison Wavelets and Image Calculus Compressions

Hisashi ENDO*, Seiji HAYANO, Yoshifuru SAITO (Hosei Univ.)

and Toshiyasu L.KUNII (Computational Science Research Centre of Hosei Univ.)

ABSTRUCT

Field theory is applied to the computer graphics. The key idea is that image data is regarded as a field potential or source density. After the governing equation of computer graphics is derived, the finite differences, finite elements and Green's function methods are applied to solve the governing equations. This approach makes it possible to compress the graphics image data without losing most of the original information. Moreover, wavelet transform is available to generate the compressed image data including rich original graphics information. We demonstrate that the computer graphics images can be compressed by wavelets as well as image calculus. Further, we try to carry out the twice/ double image compression by combining both of the wavelets and image calculus methods.

Keywords: Image compression, Visualization by differential equations, Image processing

1. 緒言

コンピュータグラフィックスは極めて豊富な情報を有するため、高品質なグラフィックデータをハンドリングするには必然的に比較的高度なハードウェアを必要とする。このような現状を踏まえ、コンピュータグラフィックスのもつ本質的な情報を抽出する手段として離散値系ウェーブレット変換による映像情報処理技術が提案されている[1]。また筆者らは、コンピュータグラフィックスを構成する画素データをスカラーポテンシャルあるいは、ベクトルポテンシャルの１成分とみなし、ベクトルの概念を導入することで古典物理学の集大成である場の理論が適応可能であることを提案している[2-5]。これは、微積分学に基づき画像の解析が可能であることを意味し、新しい画像処理技術として期待されている。画像データの微分は、画像内ターゲットのエッジを抽出するのに最もよく使われる手法であるが、同時に画像データの定数部分や１次関数的変化部分を削減することから、画像データの圧縮となる。微分可能回数だけの積分が厳密に可能ならば、原画像が再構成される。

本研究では、カラー画像データの圧縮法としてウェーブレット変換法と微積分方程式法、さらに、ウェーブレット変換法と微積分方程式法を組み合わせた方法を取り上げ、圧縮および再現性について検討する。

2. 画像のポアソン方程式

2.1. 画像のラプラシアン

画像データは、数値をマトリックス状に配置した画素(pixel)と呼ばれるもので構成されている。i 行 j 列目の画素の値を $U_{i,j}$ とすれば、画像のラプラス演算は、 (1)式の有限差分で近似的に与えられる。

$$\nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$$

$$\approx \frac{\dfrac{U_{i+1,j} - U_{i,j}}{\Delta x} - \dfrac{U_{i,j} - U_{i-1,j}}{\Delta x}}{\Delta x} + \frac{\dfrac{U_{i,j+1} - U_{i,j}}{\Delta y} - \dfrac{U_{i,j} - U_{i,j-1}}{\Delta y}}{\Delta y}$$

$$= \frac{U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{U_{i,j+1} - 2U_{i,j} + U_{i,j-1}}{\Delta y^2}. \tag{1}$$

ここで x, y 座標に対する画素間の距離 Δx , Δy を単位長とすれば、 (1)式 は、(2)式に書き直すことができる。

$$\nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \tag{2}$$

$$\approx U_{i+1,j} - 4U_{i,j} + U_{i-1,j} + U_{i,j+1} + U_{i,j-1}.$$

2.2.画像のポアソン方程式

画素をスカラーポテンシャル U とみなし、ラプラス演算でソースデンシティ σ を求めることができる。このことから画像における支配方程式

$$\nabla^2 U = -\sigma, \tag{3}$$

が導出される。(3)式はポアソンの方程式である。

図 1, 2 に 32x32 画素のサンプルカラー画像と赤、緑、青（以下それぞれ R,G,B と記す）成分に対するそれぞれのソースデンシティーを示す。

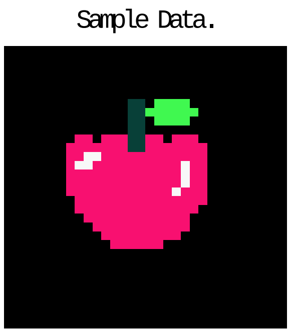

Fig.1 Sample image 1

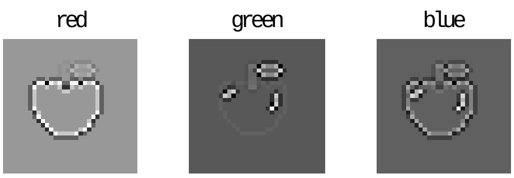

Fig.2 Source densities of sample 1

2.3. ポアソン方程式の解法

ポアソンの方程式の解法には、積分形、微分形の解法がある。

<積分形解法> (3)式の積分形解法として基本解であるグリーン関数 G を用いる方法がある。(3)式の解は、

$$U = \int_V G\sigma \quad \mathrm{d}v, \tag{4}$$

で形式的に与えられる。グリーン関数 G は 2 次元の場合

$$G = \frac{1}{2\pi} \ln |\, r \,|. \tag{5}$$

となる。ここで r は、source point と field point との距離である。

グリーン関数法を画像データに適応するとき、

$$r \to 0, \quad G \to \infty \tag{6}$$

となることから、本稿では $r = 1$ を最小距離とした。

図 3 は、図 2 に示したソースデンシティーから(5)式のグリーン関数を用いて再現されたカラー画像である。グリーン関数法を用いて、２階微分のデータを積分することで元のデータが再現されていることがわかる。図 1 と 図 3 間の相関係数は、0.87 であった。

Fig.3 Recovered image by 2D Green's function

<微分形解法> (3)式 の微分形解法として有限差分法、有限要素法などがよく知られている。有限要素法の原点である変分原理によれば、(3)式の解は、汎関数

$$F(U^*) = \frac{1}{2} \int_S (\nabla U^*)^2 \quad \mathrm{d}s - \int_S \sigma U^* \quad \mathrm{d}s, \tag{7}$$

を最小にすることであたえられる。ここで S , U^* は、それぞれ画像全体の面積、近似解を表す。近似解 U^* は、

$$U^* = U + \varepsilon\varphi, \tag{8}$$

であたえられる。 ε , φ は、それぞれ数値パラメタ、微分可能な任意の関数を示し、 $\varepsilon\varphi$ は、近似誤差を表す。(8)式を(7)式に代入し、第 1 変分 δF をとると(9)式を得る。

$$\delta F = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{F(U^*) - F(U)}{\varepsilon}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\int_S \{\nabla U \cdot \nabla\varphi - \sigma\varphi\} \mathrm{d}s + \frac{1}{2} \int_S \varepsilon (\nabla\varphi)^2 \mathrm{d}s \right]$$

$$= \int_S \{\nabla U \cdot \nabla\varphi - \sigma\varphi\} \mathrm{d}s = 0. \tag{9}$$

グリーンの定理より、(9)式は (10)式の形へ書き直すことができる。

$$\delta F = -\int_S \varphi \left(\nabla^2 U + \sigma \right) \mathrm{d}s + \oint_C \varphi \frac{\partial U}{\partial n} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = 0. \tag{10}$$

ここで$\partial/\partial n$, l は、それぞれ画像境界の垂直方向への微分、領域Sを取り囲む閉曲線を表している。結果として(7)式を最小にするということは、

$$\nabla^2 U+\sigma=0 \quad \text{and} \quad \frac{\partial U}{\partial n}=0. \qquad (11)$$

を満足することであり、ポアソン方程式を解くということを意味している。

図 4 は、三角形１次有限要素の三角形メッシュ(左)と図２に示したソースデンシティーから変分原理に基づいて再現されたカラー画像(右)である。有限要素法を用いて、２階の偏微分方程式を解くことで元のデータが再現されていることがわかる。図１と 図 4(右)間の相関係数は 0.97 であり、2 次元グリーン関数法よりも良好な再現性を有限要素解は与える。

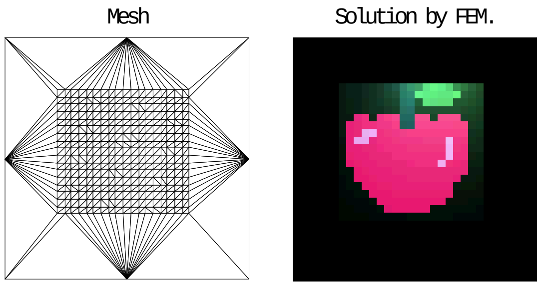

Fig.4 Finite elements image recovery
Left: Mesh system, Right: recovered image

3. 離散値系ウェーブレット変換による画像圧縮

3.1.サンプルカラー画像

図 5 に 128x128 画素のサンプルカラー画像を示す。

Fig.5 Sample image 2 (128x128 pixels)

3.2.カラー画像データのウェーブレット変換

カラー画像構成する画素の色は、それぞれ R,G,B の３原色の成分に分解できる。

$$image \in pixel, \quad pixel \in Red, Green, Blue. \qquad (12)$$

R,G,B の各要素のデータを、それぞれ行列 I_R, I_G, I_R とする。

$$image \in I_R, I_G, I_B, \qquad (13)$$

(13)式で行、列の要素数が２のべき乗個であるならば、２次元ウェーブレット変換が適用可能である。画像を構成する要素数が２のべき乗で無い場合、行列にゼロ要素を追加することでウェーブレット変換可能となる。

各行列の左右からそれぞれウェーブレット変換行列W_m、その転置行列W_m^Tを掛け算することで、R,G,B それぞれのウェーブレットスペクトラムを得ることができる。

$$S_R=W_m \cdot I_R \cdot W_m^T, \quad S_G=W_m \cdot I_G \cdot W_m^T, \quad S_B=W_m \cdot I_B \cdot W_m^T, \qquad (14)$$

図 6, 7 にそれぞれ 図.5 に示したサンプルカラー画像の R,G.B 各成分と Daubechies 20 次基底によるウェーブレットスペクトラムを示す。図７から、マザーウェーブレット近傍に大部分のスペクトラムが集中していることから、高い圧縮率が期待できる。

Fig.6 R(left),G(center),B(right) components

Fig.7 Wavelet spectrums,
R(left),G(center),B(right)by Daubechies 20th

3.3.カラー画像データのウェーブレット逆変換

(14)式で得られるウェーブレットスペクトラムのマザーウェーブレット周辺の有為性のある成分のみを抽出する。具体的には、ウェーブレットスペクトラムのある領域のだけを残して、その領域以外の行列要素はすべてゼロとする。そのようにして作成したウェーブレットスペクトラム行列S'_R, S'_G, S'_Bそれぞれに対して、 (15)式でウェーブレット逆変換を行う。

$$I'_R=W_m^T \cdot S'_R \cdot W_m, \quad I'_G=W_m^T \cdot S'_G \cdot W_m, \quad I'_B=W_m^T \cdot S'_B \cdot W_m, \qquad (15)$$

I'_R, I'_G, I'_Bは、それぞれ再現された R,G,B 各成分の行

列である。

(15)式で再現された R,G,B 各成分を合成することでカラー画像を再現することができる。

図 8 にサンプル画像(左)とサンプル画像のマザーウェーブレット付近 32x32 画素のデータから再現されたカラー画像(右)を示す。サンプル画像と再現された画像の相関係数は 0.94 となった。

Fig.8 Left：sample 2, Right :recovered from32x32 pixels, 0.94 correlation coefficient

3.4.微分データによるウェーブレット画像圧縮法

(2)式を図 6 に示す R,G,B 各成分のデータに適用し、それぞれのソースデンシティーを求めた結果を図 9 に示す。Daubechies 20 次基底関数を用いて、図 9 のソースデンシティーをウェーブレット変換した結果を図 10 に示す。 図 10 で、マザーウェーブレット近傍 32x32 点のソースデンシティーを残し他をゼロとする。この結果を逆ウェーブレット変換し、支配方程式.(3) を解くことで画像を再現する。

図 11 にサンプル画像(左)とサンプル画像のソースデンシティーのマザーウェーブレット近傍 32x32 画素から再現されたカラー画像(右)を示す。サンプル画像と再現された画像間の相関係数は、0.92 となった。数値的には従来型のウェーブレット圧縮法に劣る結果となった。

図 10 から、ウェーブレットスペクトラムがマザーウェーブレット近傍に集中しないことがわかる.。しかし、マザーウェーブレット近傍のスペクトラムのみを用いてカラー画像を再現してもほとんど情報の欠落はない。このことから、かなりの情報がスペクトラムに凝縮されていることが判明した。

4. 結論

本研究では、カラー画像データの圧縮・再現法としてウェーブレット変換法、微積分方程式法の比較・検討をおこなった。何れの方法も比較的良好な圧縮・再現性を有することを明らかにした。

参考文献

[1]斎藤兆古:”*Mathematica* による画像処理入門”, 朝倉書店, 1998

[2] Hisashi Endo, Seiji Hayano , Yoshifuru Saito , and T.L.Kunii, " Sketch Generation by Image Noise Reduction Based on Visualization Vector Fields," *IEEE Visualization '99* to be submitted

[3] Yoshifuru Saito and Tosiyasu L. Kunii," Field Theory of Computer Graphics and Its Potentials," *IEEE Visualization '99* to be submitted

[4] Hisashi Endo, Seiji Hayano , Yoshifuru Saito , and T.L.Kunii, " Visualization by Differential Equations," *IEEE Visualization '99* to be submitted

[5] Yoshifuru Saito, Hisashi Endo, Seiji Hayano, and T.L.Kunii, " Eigen Pattern of Computer Graphics and Its Application to Human Face Identification," *IEEE Visualization '99* to be submitted

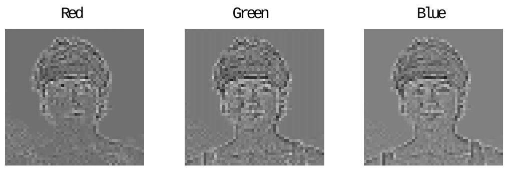

Fig.9 Source densities of sample 2, Left:R,Center:G,Right:B

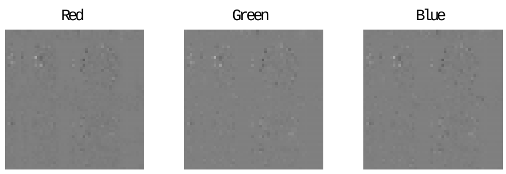

Fig.10 Wavelet spectrums of the source densities in Fig. 9, (Daubechies 20th)

Fig.11 Left：sample 2, Right :recovered from32x32 source density pixels, 0.92 correlation coefficient