

Wavelet 変換による逆問題解析

Strategic Wavelet Transformation Method to The Inverse Problems

齋藤 兆古

Yoshifuru SAITO

法政大学工学部

College of Engineering, Hosei University

1. はじめに

Wavelet 解析、名前を聞くと何のことも良く判らない。しかし、何となくロマンを感じる言葉である。Wavelet 解析“細波解析”とは何であろうか？ 波形解析で用いられる常套手段は Fourier 解析である。Fourier 解析は任意の波形を正弦波と余弦波の和で表現、すなわち 波形を最も標準的の周期関数である正弦波と余弦波に分解して解析する手法である。正弦波と余弦波の間には関数の直交性が成立するため、数学的に極めて明快で美しい解析手段である。他方、Wavelet 解析には連続系と離散値系の Wavelet 解析が知られている。連続系の Wavelet 解析では Fourier 解析の正弦波や余弦波の代わりに三角波や Mexican Hat, French Hat のような波形を使う[1]。このよ

うな展開する関数を基底関数と言う。図 1 に Mexican Hat 型の基底関数を示す。

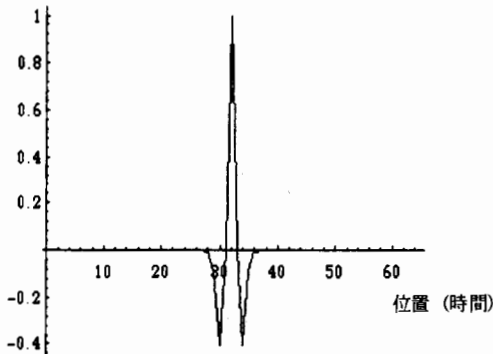


図 1. Mexican Hat 型基底関数

Fourier 解析の基底関数である正弦波や余弦波は周波数を変えるが、連続系の Wavelet 解析の基底関数は基底関数の幅（これは周期であるため Fourier 解析での周波数の逆数に相当する）と基底関数の位置（時間軸上では基底関数波形の中心時間）を変える。Fourier 解析では波形を基底関数の周波数軸に沿った大きさ、すなわち 周波数-Spectrum 空間に置き換えて解析するが、連続 Wavelet では、基底関数の幅（周期）と基底関数の位置（時間）平面上に Wavelet Spectrum を展開して解析する。換言すれば、連続 Wavelet 解析は、Fourier 解析で各高調波の波形を位置（時間）軸を共通にして並べた空間で解析しようとする方法である。Fourier 解析との本質的な違いは、Fourier 解析の基底関数が直交性を有するのに対し、連続 Wavelet の基底関数は必ずしも直交性を持たない点にある。図 2 a の波形を Fourier Spectrum に展開した結果を図 2 b に示す。図 2 c は図 1 の Mexican Hat 型の基底関数を使った図 2 a の Wavelet Spectrum である。

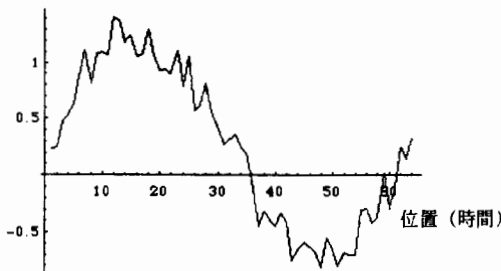


図 2 a. ノイズを含んだ正弦波

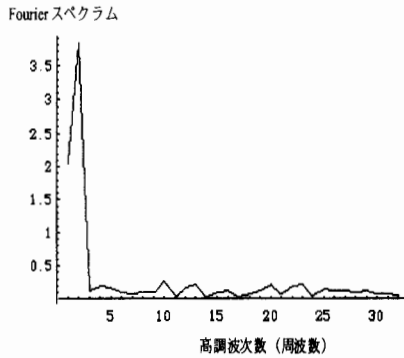


図 2 b. Fourier Spectrum

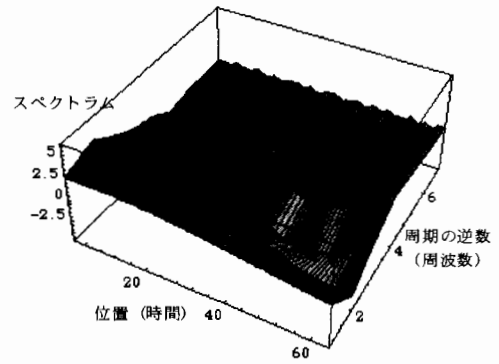


図 2 c. Wavelet Spectrum

図 2 b の Fourier 解析の結果からは基本波と高調波成分が判読できるが、図 2 c の Wavelet 解析の結果は位置 (時間) 軸に沿ってスペクトラムを見ると波形が判り、且つ 周波数軸をみるとおおまかな周波数がわかる。このように連続系 Wavelet は位置 (時間) ・振幅・周波数に跨った解析を可能とする。問題は基底関数が直交しない点にある。これは基底関数の選択によって異なる結果を与えることを意味する。従って、連続系の Wavelet 解析は解析対象によって異なる基底関数を選び、解析対象の望ましい特徴を抽出するために用いられる。

他方、離散値系の Wavelet 解析は、基底関数の直交性が常に成り立つ。これは Fourier 解析と同様に離散値系 Wavelet 解析の Spectrum に Power の概念が与えられることを意味する[1-4]。離散値系と呼ばれる言葉は、従来の多くの場合、連続関数を Sampling して量子化されたデータを扱う系に対して用いられる。しかし、Wavelet 解析における連続系と離散値系は本質的に異なり、連続関数を Sampling したデータを前提にせず、最初から離散化されたデータを前提とする線形変換である。従って、Sampling 間隔を無限小にして連続系が得られることを前提にしていないことに留意する必要がある。また、離散化されたデータの個数は 2 のべき乗でなければならぬことも大きな特徴である。近年の電子機器の測定器は大部分がデジタル化され、解像度と Sampling 個数、何れも 2 のべき乗であり、離散値系 Wavelet 解析はこの意味でデジタル測定器と相性のいい解析法であることが興味深い。

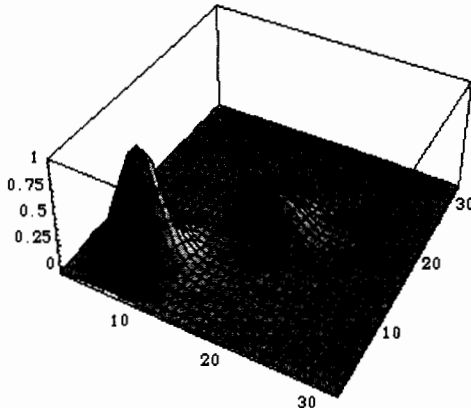


図 3 a. 2次元データ

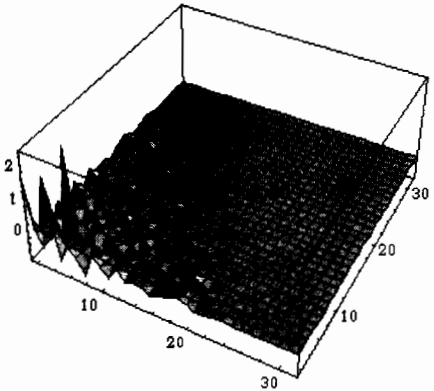


図 3 b. Wavelet Spectrum

さて、Wavelet 解析の特徴は波形の多重解像解析とデータ圧縮に代表される。図 2 c の結果は図 2 a に示す波形の多重解像解析を連続系 Wavelet 変換で行った例である。図 3 a に示す 2次元データを離散値系 Wavelet 変換して得られた Spectrum を図 3 b に示す。図 3 b から、Wavelet Spectrum の値の大きな部分は原点付近に集中し

ていることが判る。図3 aの2次元図形は32×32のデータからなっているが、図3 bで、0.2以上の大きさを持つ Spectrum は26個である。この26個の Spectrum から Wavelet 逆変換によって再現した結果を図3 cに示す。図3 cのデータと図3 aの元のデータ間の相関は97.2%である。これは驚くべき結果であり、1024個のデータがわずか26個のデータから97%以上の相関で再現されることを意味する。これが画像や音声データの圧縮に離散値系 Wavelet 変換が使われる所以である。

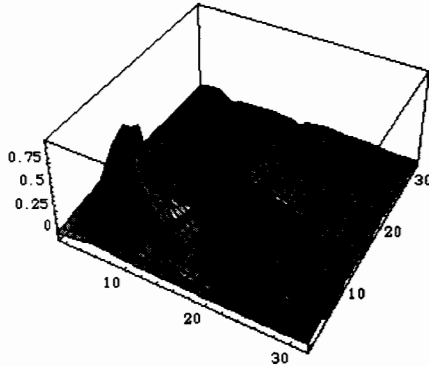


図3 c. 26個に圧縮された Spectrum から再現されたデータ

本稿では、離散値系 Wavelet 変換を使って線形システムの近似解析を提唱するものである。その原理は以下の骨子に基づいている。

- 1) 線形システムのシステム行列を図3 aに示すような2次元データとみなす。
- 2) システム行列を Wavelet 変換する。その結果、システム行列で最も支配的な要素が存在する正方領域を Wavelet Spectrum から切り出す。
- 3) 切り出された正方領域の逆行列を求める。
- 4) 逆行列に零要素を付加し、元のシステム行列の転置した形の近似行列を作る。
- 5) 元のシステム行列の転置した形の近似行列を Wavelet 逆変換し、システム行列の近似逆行列を得る。

2. 離散値系 Wavelet 変換による線形システムの近似解析

2.1 離散値系 Wavelet 変換

2.1.1 Wavelet 変換行列

いま、 a と b なる数値を考えてみると、この数値の線形的な組み合わせは

$$\begin{aligned} s &= a + b \\ d &= a - b \end{aligned} \quad (1)$$

が考えられる。さて、 s と d が与えられ a と b を求めようとするれば、

$$\begin{aligned} a &= \left(\frac{1}{2}\right)(s + d) \\ b &= \left(\frac{1}{2}\right)(s - d) \end{aligned} \quad (2)$$

となる。

(1) 式の関係を行列を使って書くと、

$$\mathbf{X}' = \mathbf{C}\mathbf{X} \quad (3)$$

と書ける。

ここで、 \mathbf{X}' 、 \mathbf{C} 、 \mathbf{X} はそれぞれ

$$\mathbf{X}' = \begin{bmatrix} s \\ d \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

である。他方、(2) 式は

$$\mathbf{X} = \mathbf{D}\mathbf{X}' \quad (5)$$

と書ける。但し、行列 \mathbf{D} は

$$D = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

である。行列 C と D との関係は

$$D \cdot C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

となる。すなわち D は C の逆行列になっている。しかし、(6) 式の行列の係数(1/2)を C と D に平等に分配して、

$$C = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad D = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

とすれば、行列 D は C の転置行列であり、且つ逆行列となる。すなわち

$$C^{-1} = C^T \quad (9)$$

である。次に a, b の 2 個の数値だけでなく、 a, b, c なる数値の組み合わせを考える。この場合、

$$\begin{aligned} s_1 &= a+b, & s_2 &= b+c, & s_3 &= c+a, \\ d_1 &= a-b, & d_2 &= b-c, & d_3 &= c-a \end{aligned} \quad (10)$$

等の組み合わせが考えられる。この関係を行列で書くと、

$$\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \quad (11)$$

となる。(11) 式右辺の係数行列は 6 行 3 列の長方形行列であるため、(9) 式のようにうまく逆行列を得られない。これは、組み合わせる数値の個数が奇数であると (5) - (9) 式のような線形変換が適用できないことを意味する。では、 a, b, c, d の 4 個の数値の組みを考える。最初に考えられる組み合わせは、

$$\begin{bmatrix} s_1 \\ d_1 \\ s_2 \\ d_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} \quad (12)$$

となる。これには、当然、

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s_1 \\ d_1 \\ s_2 \\ d_2 \end{bmatrix} \quad (13)$$

が成り立つ。しかし、 a と b 、 c と d それぞれの組み合わせは出来るが、 a と c 、 b と d 等の組み合わせは出来ない。

このため、(12) 式の左辺を並べ変えて、次の組み合わせを得る。

$$\begin{bmatrix} S_1 \\ D_1 \\ d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} \quad (14)$$

(14) 式で、 a, b, c, d の 4 個の数値の組み合わせがすべて揃ったこととなり、結局、元の $\{a, b, c, d\}^T$ のベクトルは (13) と (14) 式の 2 回の線形変換で、和 S_1 と差 D_1 、 d_1 、 d_2 を要素とするベクトル $\{S_1, D_1, d_1, d_2\}^T$ に変形された。(14) 式の逆変換は

$$\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} S_1 \\ D_1 \\ d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} \quad (15)$$

よって行われ、(15)式の左辺を(13)式右辺のベクトルの形に並べ変えて、(13)式に代入することで完全な逆変換ができる。(12)式から(14)式までの変換を纏めて書くと、

$$\begin{bmatrix} S_1 \\ D_1 \\ d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} \quad (16)$$

または

$$\mathbf{X} = \mathbf{W} \cdot \mathbf{X} \quad (17)$$

となる。 W はWavelet変換行列であり、この変換行列を構成する $1/\sqrt{2}$ と $-1/\sqrt{2}$ をHaarの基底関数と呼ぶ。

次に6個の数値の組み合わせを考えると、(12)式と同じ形で第1回の変換は、和が3組と差が3組となり、(11)式と同様に第2回の変換は出来ない。従って、数値の組を和と差に分解する線形変換は、組を構成する数値の個数が、偶数で且つ、2,4,8,16,32等、2のべき乗でなければならない。

2. 1. 2 変換行列の物理的意味

さて、2のべき乗個のデータは総て和と差の形に表現できることが分かった。実はこれが離散値系Wavelet変換の骨子であり、和と差はそれぞれ積分と微分に対応する概念であるから、Wavelet変換は積分と微分を行うデジタルフィルタリングを行う演算と考えられる。和を取る演算、すなわち積分演算は数値を平均化する平滑フィルターであり、差をとる演算、すなわち微分演算は数値の変化率の大きい部分を捕らえるフィルターとなる。このため、和の部分は全体の平均的情報を抽出し、差の部分は変化率の大きい情報を抽出する。従って、フーリエ変換のSpectrumが変化率の大きいパルス状のデータに対して拡散するのに対し、Wavelet変換のSpectrumは変化率の大きなパルスを含むデータに対して収束する相補的性質を持つ。また、Wavelet変換は画像データ等に対して、画像の輪郭やコントラストの高い部分が零でないWavelet Spectrumを与えることとなる。このため、画像データの全てを記憶しなくても、画像の輪郭やコントラストの高い部分のみを記憶することが可能となり、結果として画像圧縮がなされる。画像データでなく、より一般的な波形データで考えれば、波形データの持つ変化率が急峻な特徴のみを抽出するのに極めて有効なデジタルフィルター演算とも解釈できる。これがWavelet変換のデータ圧縮原理である。

具体的な例として、データの個数が4個の場合について考える。(17)式の変換行列 W の第1行は、(16)式から、全てのデータの和をとることを意味する。従って、(16)式の S_1 はデータの平均的情報を表し、 S_1 だけを逆変換した結果を第0次解像度解析結果と呼び、全データの平均値を表す。特に、データの平均的情報を表すWavelet SpectrumをMother Wavelet係数と呼ぶ。(17)式の変換行列 W の第2行は、全体のデータを前半と後半に分けて、前半と後半データ間の変化率を求める差分演算になっている。従って、(16)式の D_1 だけを逆変換すると、全体を2分割した場合の変化率を表すこととなり、第1次解像度解析結果と呼ぶ。(17)式の変換行列 W の第3、4行は、隣接するデータ間の変化率を求める差分演算となつている。このため、(16)式の d_1, d_2 だけを逆変換した結果は最も高周波の変化率を表すこととなり、第2次解像度解析結果と呼ぶ。

以上のことから、離散値系Wavelet変換は、与えられたデータで、全データの平均値と大きなグループから隣接するデータまでの変化率を抽出する変換であることが明らかであろう。また、2のべき乗である n 個のデータ

は $\text{Log}[n]/\text{Log}[2]$ 次までの解像度で解析ができる。

2. 1. 3 Wavelet 変換の一般化

いままでは 2 のべき乗からなるデータベクトルを和と差にわけける最も単純な Haar 基底による Wavelet 変換について述べた。和と差の概念はそれぞれ積分と微分に対応するが、積分や微分には重み付きで行う場合がある。例えば Gauss 型の数値積分公式等がその典型的な例である。ここでは、Wavelet 変換の和や差を取る場合、重み付きで行うことを考えよう。換言すれば、重み付き積分・微分演算の概念を Wavelet 変換に導入し、高次の係数を使った Wavelet 変換へ一般化する。

さて、2 のべき乗の要素からなるデータベクトル X を線形変換する演算 (3) 式では、行列 C が隣接する要素間の和と差を取る演算子であった。ここでは次のような 4 個の係数 c_0, c_1, c_2, c_3 を持つ変換行列 C を考える。

$$C = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_3 & -c_2 & c_1 & -c_0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & -c_2 & c_1 & -c_0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & c_3 & -c_2 & c_1 & -c_0 \\ c_2 & c_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & c_0 & c_1 \\ c_1 & -c_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & c_3 & -c_2 \end{bmatrix} \quad (18)$$

(18) 式で、第 1 行はベクトル X の要素 1 から 4 までにそれぞれ係数 c_0, c_1, c_2, c_3 を重みとする平均値を取ることを意味する。第 2 行はベクトル X の要素 1 から 4 までにそれぞれ係数 c_0, c_1, c_2, c_3 を重みとする差分を取ることを意味する。換言すれば、(18) 式の第 1 行は重みをつけた積分演算に対応するデジタルフィルターであり、第 2 行は重みをつけた微分演算に対応するデジタルフィルターである。第 3、4 行はそれぞれベクトル X の要素 3 から 6 までに対する積分と微分演算を行うことを意味する。従って、積分と微分演算は Haar 基底の場合と同様にベクトルの 2 要素ずつシフトして循環する形で行われる。

次に、逆変換を可能とするために

$$C^T C = I \quad (19)$$

の条件が成り立つことが必要である。 I は C と同じ次数を持つ単位行列を示す。(19) 式の条件より

$$\begin{aligned} c_0^2 + c_1^2 + c_3^2 &= 0 \\ c_2 c_0 + c_3 c_1 &= 0 \end{aligned} \quad (20)$$

が成り立つ。しかし、式の数が未知数の数より少なく、(20) 式から係数 c_0, c_1, c_2, c_3 を決めることはできない。このため、次の条件を追加する。

$$\begin{aligned} c_3 - c_2 + c_1 - c_0 &= 0 \\ 0c_3 - 1c_2 + 2c_1 - 3c_0 &= 0 \end{aligned} \quad (21)$$

(21) 式で、最初の条件は入力データが一定値であれば常に零となることを意味する。第 2 の条件は入力データが単調増加であつても常に零であることを意味する。従って、入力データが 2 次関数以上の変化率を持つとき、第 1 段階の差分演算を受けた項は零でない値を持つ。第 2 段階は重み付き積分もしくは平均値の項で 2 次関数以上の変化率を抽出する演算となる。このことから、この場合の Wavelet 演算は Haar 基底を用いた Wavelet 演算よりも大きな変化率の部分のみを抽出する変換となる。

(20) 式に (21) 式の条件を追加することで

$$c_0 = \frac{1+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \quad c_1 = \frac{3+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \quad c_2 = \frac{3-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \quad c_3 = \frac{1-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} \quad (22)$$

として (18) 式の要素が求められる。

2. 2 線形システムへの応用

2. 2. 1 線形システムの Wavelet 変換

いま、式の数が n 、未知数の数が m のシステム方程式を考える。 X を n 次のベクトル、 M を n 行 m 列の係数行列、 Y を m 次のベクトルとする。このとき、システム方程式は次のように書ける。

$$X = M \cdot Y \quad (23)$$

n 次の Wavelet 変換行列を W_n 、 m 次の Wavelet 変換行列を W_m とすれば、(23) 式の Wavelet 変換は次式で行われる。

$$W_n \cdot X = (W_n \cdot M \cdot [W_m]^T) \cdot (W_m \cdot Y) \quad (24)$$

または

$$X' = M' \cdot Y' \quad (25)$$

従って、行列 M の Wavelet 変換は次式で与えられる。

$$M' = W_n \cdot M \cdot [W_m]^T \quad (26)$$

で与えられる。

2. 2. 2 線形システムの近似解法

Wavelet 変換の性質から、Wavelet 変換されたベクトル X' や Y' で、値の大きな要素は各ベクトルの先頭部分に集中する。同様に、Wavelet 変換されたシステム行列 M' においても、要素 (1,1) を先頭として値の大きな要素が図 3 b のように集中する。従って、(25) 式のベクトルとシステム行列で、先頭部分の値の大きな要素のみを切り出したシステムは (25) 式の極めて良い近似システムとなることが期待できる。これは、切り出されたシステム行列が正方行列で、且つ 非特異行列であれば、逆行列が可能であり (25) 式の近似解ベクトルが得られることを意味する。このようにして得られた (25) 式の近似解ベクトルに零要素を追加し、元の解ベクトル Y' と同じ大きさのベクトルにした後、Wavelet 逆変換すれば (23) 式の近似解ベクトルが得られる。

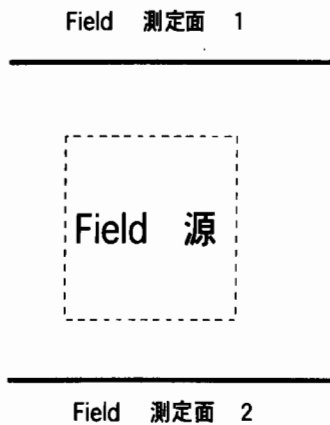


図 4 a. 線形システムの例、上下の Field 測定から Field 源を求める問題

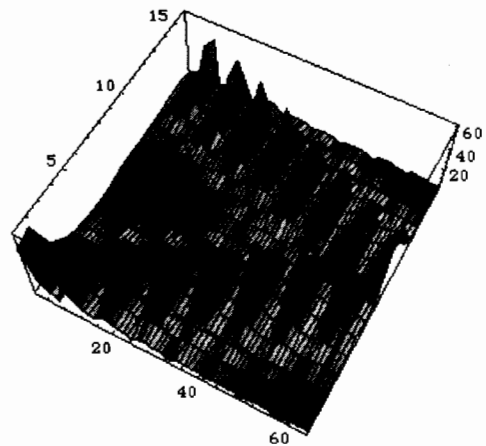


図 4 b. システム行列、磁界の測定点数は上下で 16 点、電流は縦横 $8 \times 8 = 64$ 点に分割した各正方領域の中心に位置する

ここでは具体的な例として、図 4 a に示すような Field 測定面 1 と 2 で測定される Field から Field 源を求める問題を考える。例えば Field 源が電流であれば、測定される Field は磁界となる。電流の流れる方向が図の垂直方

向であれば、磁界と電流の関係は Ampere の法則で決まる。測定面 1 と 2 で測定面に平行方向の磁界がそれぞれ 8 点づつ測定され、全体で 16 点の磁界が測定されたとする。電流の存在する領域は縦・横それぞれ 8 個の正方領域に分割され、各正方領域の中心に正方領域の電流が集中しているとする。従って、16 点の磁界分布から 64 個の電流を求めるシステムとなる。この場合のシステム行列を図 4 b に図示する。このシステムは式の数 $n=16$ 、未知数の数が $m=64$ であるから、通常、何らかの拘束条件を付加しない限り、一意的な解は期待できない。しかし、Wavelet 変換による方法は近似的であるが、一意的な解を可能にする。

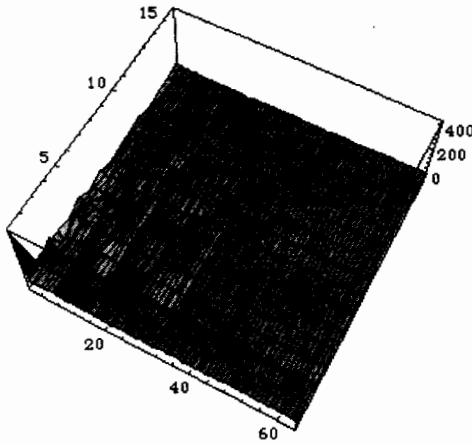


図 4 c. システム行列の Wavelet Spectrum

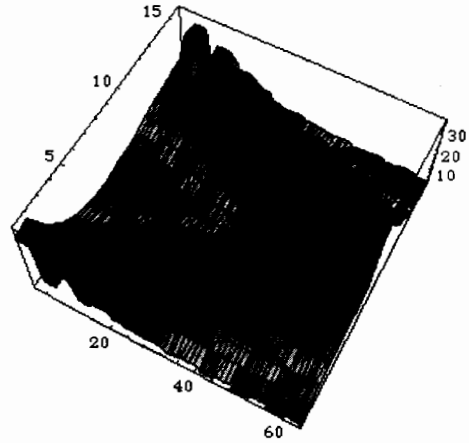


図 4 d. Wavelet spectrum の(1,1)から(16,16)の正方領域の要素から Wavelet 逆変換によって得られた近似システム行列

図 4 c は図 4 b のシステム行列を Wavelet 変換して得られたシステム行列の Wavelet Spectrum である。図 4 c は明らかに(1,1)要素を中心とする部分に値の大きな Spectrum が集中していることを示している。図 4 c で、(1,1)要素を先頭とする正方領域を残し他を零要素として、システム行列を近似する。この例題で取り得る最大の正方領域は 16×16 (式の数 n に等しい大きさの正方領域) である。図 4 d に(1,1)要素を先頭とする 16×16 の正方領域のみを Wavelet 逆変換して得られた近似システム行列を示す。図 4 b の元のシステム行列と図 4 d の近似システム行列間の相関は 86% であり、これは、Wavelet 変換によるこの系に対する解析結果が少なくとも 14% 程度の誤差を含むことは覚悟しなければならないことを意味する。

元のシステム行列は 16 行 64 列であるから、近似逆行列 M_{Appro}^{-1} は 64 行 16 列と仮定する。図 4 c の Wavelet Spectrum 行列から(1,1)要素を先頭として 16×16 の正方行列 S を切り出し、これの逆行列 S^{-1} に 48 行 16 列の零行列 Z を追加し

$$M_{Appro}^{-1} = S^{-1} + Z \quad (27)$$

を得る。但し、(27)式は S^{-1} 行列に列数が一致するように Z 行列を追加することを意味する。従って、図 4 c の Wavelet Spectrum 行列の近似逆行列 M_{Appro}^{-1} は 64 行 16 列となる。(25)式で、近似逆行列 M_{Appro}^{-1} が(27)式で与えられたとすれば、

$$M_{Appro}^{-1} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{Y}$$

$$M_{Appro}^{-1} \cdot W_m \mathbf{X} = W_n \mathbf{Y} \quad (28)$$

が成り立つ。(28)式の両辺に W_n^T を掛け算して、

$$W_n^T M_{Appro}^{-1} \cdot W_m \mathbf{X} = \mathbf{Y} \quad (29)$$

を得る。よって、システム行列 M の近似逆行列 M_{Appro}^{-1} は

$$M_{Appro}^{-1} = W_n^T M_{Appro}^{-1} \cdot W_m \quad (30)$$

で与えられる。

2. 2. 3 近似逆行列の妥当性

(23) 式でシステム行列 M の逆行列 M^{-1} が求めれば、

$$M^{-1} \cdot M = I_m \quad (31)$$

が成り立つ。 I_m は m 次の単位行列である。また、(23) 式の解が存在するためには

$$M \cdot M^{-1} = I_n \quad (32)$$

が成り立つ必要がある。 I_n は n 次の単位行列である。換言すれば、(32) 式は解ベクトル Y が存在する条件を意味し、(31) 式は解ベクトル Y が一意に決まる条件である[5]。果たして、いま議論している線形システムの解は一意に決まるであろうか？ 図4 eに(31) 式の計算結果を図示する。最大値が0.75、最小値が-0.25であるから、絶対値が1の要素がほぼ対角線上に並んでいることが図4 eからわかる。これは、解は一意に決まるが、25%程度の最大誤差を含むことを意味する。他方、解の存在を調べるため、(32) 式を計算した結果を図4 fに示す。図4 fの結果は完全な16次の単位行列であるから、明らかに例題で取り上げた線形システムは解が存在することが確認できる。

以上の結果から、本稿で取り上げた線形システムはWavelet変換を使って近似的に一意的な解が得られることがわかった。

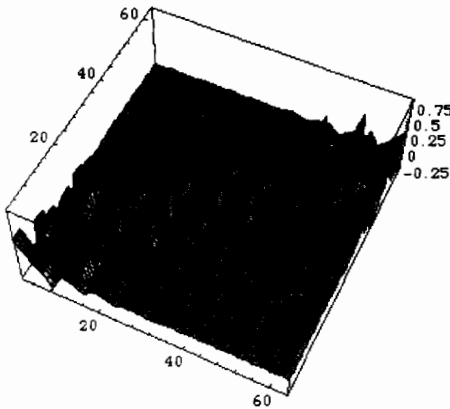


図4 e. $M_{Appro}^{-1} \cdot M$ の計算結果

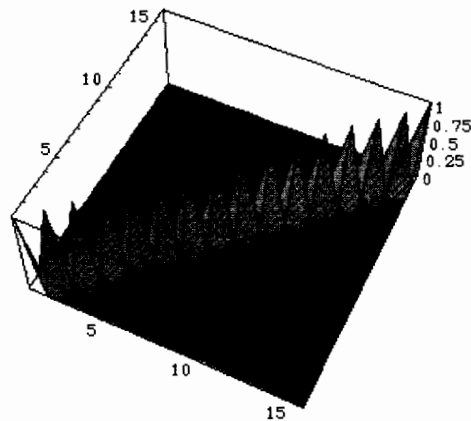


図4 f. $M \cdot M_{Appro}^{-1}$ の計算結果

2. 2. 4 近似解

図4 gに

$$Y = M_{Appro}^{-1} \cdot X \quad (33)$$

で求めた近似解(細線)と計算で仮定した厳密解(太線)の比較を示す。Wavelet変換による結果は極めて良い近似解を与えることが確認できる。

次に、(33)式で得られた近似解ベクトル Y を(23)式に代入して、測定磁界ベクトル X を計算した。図4 hに近似解が与える磁界ベクトル(細線)と厳密な磁界ベクトル(太線)を示す。近似解は(23)式を満足するため、磁界ベクトルは完全に一致していることが図4 hからわかる。

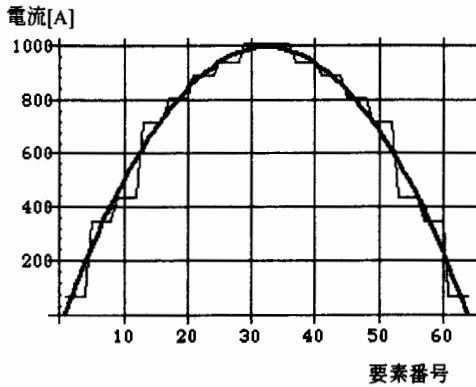


図4 g. 近似解（細線）と厳密解（太線）

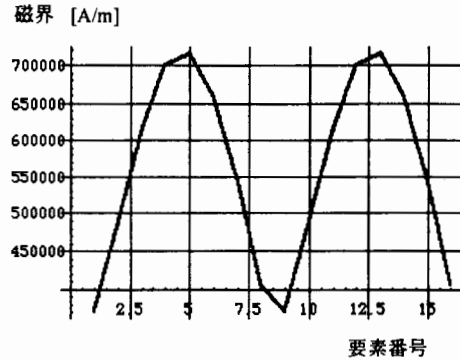


図4 h. 近似解の与える磁界（細線）と厳密な磁界（太線）

3. まとめ

本稿は、線形系のシステム行列の要素を画像データとみなし、離散値系の Wavelet 変換によってシステム行列の支配的要素を抽出することで線形システムの近似解を得る方法を提案した。本稿で提案した手法は全く新しい線形システムの解析法であり、以後、Strategic Wavelet Transformation (SWT と略記) 法、と呼ぶこととする。この SWT 法を用いて局所的な磁界測定から電流分布を求めるシステムを近似的に解くことが可能であることを示した。従来、この種のシステム、すなわち 逆問題を解くには多くの経験的拘束条件や仮定を必要とした。しかし、SWT 法によって、初めて解の存在や一意性について明快に理論的妥当性を評価し得る可能性が示唆された。この意味で、SWT 法は新しい線形代数とその応用に関する学術分野が開拓される可能性を示唆している。

参考文献

- [1] 山田道夫、電子情報通信学会誌、Vol.76, No.5, 518-528(1993).
- [2] I.Daubechies, Comm.Pure. and Appl. Math., 41, 909-996 (1988).
- [3] 吉田悟史、土井達也、斎藤兆古、電気学会マグネティックス研究会資料、MAG-95-142 (1995).
- [4] D.E.Newland, "Random Vibrations, Spectral & Wavelet Analysis," Longman Scientific & Technical, 3rd Edit. (1993).
- [5] 山口昌哉 監訳、井上 昭 訳、G. ストラング著、“線形代数とその応用” (産業図書)。

原稿受付日	平成7年12月28日
-------	------------