

関島 大志郎<sup>○</sup>, 早野 誠治, 斎藤 兆古 (法政大学工学部)

## Noise Processing by Wavelets Convolution Technique

Daishiro SEKIJIMA, Seiji HAYANO and Yoshifuru SAITO

## ABSTRACT

We have studied the visualization of the current distributions from the locally measured magnetic fields. In order to visualize the current distributions, it is intrinsically reduced into solving an ill-posed inverse problem. In most cases, the solutions of the ill-posed inverse problems tend to increase the noise, and the threshold operation is used for the noise reduction. Though this operation is strong noise reduction strategy, it needs a lot of trial and error and experiences for deciding the threshold value.

In the present paper, we propose one of the methodologies of the noise processing. At first, we apply the generalized vector sampled pattern matching (GVSPM in short) method to visualizing the quasi-3D current vector distributions. Second, in order to extract the major current vectors, we apply the 3D vector wavelet transforms employing the several wavelet base function to the noisy current vectors. Consequently, in order to extract common current vectors among them, each of the current vectors was convoluted. Thus, we have succeeded in visualizing the quasi-3D current vector distributions without any threshold operation.

**Keywords:** Wavelets transform, Convolution, Inverse problem

## 1. まえがき

プリント基板上の電流分布を可視化することは、現代の電気・電子機器に対して欠損部分の探査や、EMC問題の検査を行う上で最も重要なことである<sup>1)</sup>。電気・電子機器を分解、破壊せずに電流分布を可視化するためには、通常、不適切な線形システムである逆問題を解くことに帰する。なぜならば電気・電子機器外部から得られる情報は局所的に測定された磁界のみであり、これらの限られた局所的な磁界分布から磁界源である電流分布を計算しなければならないからである。

多くの逆問題は、 $Y=CX$  という不適切な線形システム方程式によって解かれる。ここで、 $Y$  は  $n$  次の測定された電磁界ベクトル、 $X$  は  $m$  次の電磁界源ベクトル、そして  $C$  は  $n$  行  $m$  列のシステム行列であり、電磁界と電磁界源の関係を表すグリーン関数で構成されている。多くの場合、未知数の数  $m$  のほうが既知である数  $n$  よりもはるかに多い。このように、電流分布を推定するためには、不適切な線形システム方程式  $Y=CX$  を解くことに帰するのは明らかである。

また、不適切問題の解は、一般にノイズを拡大する傾向を持ち、このノイズを除去する方法として閾値演算が頻繁に採用される。閾値演算は極めて強力にノイズを削減する反面、閾値の決定に多くの試行錯誤と経験を必要とする。

本論文では、立方体の6面で局所的に測定された2次元の磁界分布から一般化ベクトルSPM法を用いて2次元の電流分布推定を行い、得られた局所2次元電流分布を組み合わせることで立方体内の準3次元電流分布を推定する。そして、ノイズ処理を行う1方法として、複数個の基底関数を用いたウェーブレット変換で、データの主要部分を抽出し、何れの基底関数でも共通となる解を畳み込み演算で抽出する方法を提案する。

## 2. 逆問題解析法

## 2.1 不適切な線形システム方程式

(1) 式で与えられる一般的な線形システム方程式を考える。

$$Y = CX, \quad (1)$$

ここで、 $Y$  は  $n$  次の入力ベクトル、 $X$  は  $m$  次の解ベクトル、そして  $C$  は  $n$  行  $m$  列のシステム行列であり、多くの場合  $m > n$  である。(1) 式は (2) 式のように書き直すことも可能である。

$$Y = \sum_{i=1}^m x_i C_i, \quad (2)$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}, \quad C = [C_1 \quad C_2 \quad \dots \quad C_m]$$

さらに (2) 式の両辺を入力ベクトルと列ベクトル、それぞれのノルムで正規化して (3) 式を得る。

$$\frac{Y}{|Y|} = \sum_{i=1}^m \left( x_i \frac{|C_i|}{|Y|} \right) \frac{C_i}{|C_i|} \quad (3)$$

or

$$Y' = C' X'$$

$$\mathbf{X}' = \begin{bmatrix} x_1 \frac{\mathbf{C}_1}{|\mathbf{Y}|} & x_2 \frac{\mathbf{C}_2}{|\mathbf{Y}|} & \dots & x_m \frac{\mathbf{C}_m}{|\mathbf{Y}|} \end{bmatrix}^T,$$

$$\mathbf{C}' = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & \mathbf{C}_2 & \dots & \mathbf{C}_m \\ |\mathbf{C}_1| & |\mathbf{C}_2| & \dots & |\mathbf{C}_m| \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{Y}' = \frac{\mathbf{Y}}{|\mathbf{Y}|}$$

2.2 評価関数

(2)式は入力ベクトル  $\mathbf{Y}$  が必ずシステム行列の列ベクトル  $\mathbf{C}_i$  の線形結合で与えられることを意味する。したがって、 $k$  回目の反復解  $\mathbf{CX}^{(k)}$  と入力ベクトル  $\mathbf{Y}$  間の角度の余弦成分

$$f(\mathbf{X}^{(k)}) = \frac{\mathbf{Y} \cdot \mathbf{CX}^{(k)}}{|\mathbf{Y}| |\mathbf{CX}^{(k)}|}$$

$$= \frac{\mathbf{Y} \cdot |\mathbf{Y}| \mathbf{C}' \mathbf{X}'^{(k)}}{|\mathbf{Y}| |\mathbf{Y}| |\mathbf{C}' \mathbf{X}'^{(k)}|}$$

$$= \mathbf{Y}' \cdot \frac{\mathbf{C}' \mathbf{X}'^{(k)}}{|\mathbf{C}' \mathbf{X}'^{(k)}|}$$

を解の評価関数とし、

$$f(\mathbf{X}^{(k)}) \rightarrow 1 \tag{5}$$

となる解ベクトル  $\mathbf{X}^{(k)}$  を得る。反復計算の初期値を  $\mathbf{X}^{(0)}$  とすると (6) 式を得る。

$$\Delta \mathbf{Y}'^{(1)} = \mathbf{Y}' - \frac{\mathbf{C}' \mathbf{X}'^{(0)}}{|\mathbf{C}' \mathbf{X}'^{(0)}|} \tag{6}$$

$I_m$  を  $m$  次の単位正方行列、 $\Delta \mathbf{X}^{(1)}$  を解の誤差ベクトルとすると、第一次近似解ベクトルは (7) 式の形で書ける。

$$\mathbf{X}'^{(1)} = \mathbf{X}'^{(0)} + \Delta \mathbf{X}'^{(1)}$$

$$= \mathbf{X}'^{(0)} + \mathbf{C}'^T \Delta \mathbf{Y}'^{(1)}$$

$$= \mathbf{X}'^{(0)} + \mathbf{C}'^T \left( \mathbf{Y}' - \frac{\mathbf{C}' \mathbf{X}'^{(0)}}{|\mathbf{C}' \mathbf{X}'^{(0)}|} \right)$$

$$= \mathbf{C}'^T \mathbf{Y}' + \left( I_m - \frac{\mathbf{C}'^T \mathbf{C}'}{|\mathbf{C}' \mathbf{X}'^{(0)}|} \right) \mathbf{X}'^{(0)}$$

したがって、 $k$  回目の解ベクトル  $\mathbf{X}^{(k)}$  は (8) 式で与えられる。

$$\mathbf{X}^{(k)} = \mathbf{X}^{(k-1)} + \mathbf{C}'^T \Delta \mathbf{Y}'^{(k-1)}$$

$$= \mathbf{C}'^T \mathbf{Y}' + \left( I_m - \frac{\mathbf{C}'^T \mathbf{C}'}{|\mathbf{C}' \mathbf{X}'^{(k-1)}|} \right) \mathbf{X}^{(k-1)} \tag{8}$$

2.3 収束条件

(8) 式で解が収束する条件は状態遷移行列  $S$

$$S = I_m - \frac{\mathbf{C}'^T \mathbf{C}'}{|\mathbf{C}' \mathbf{X}'^{(k-1)}|} = I_m - \frac{\mathbf{C}'^T \mathbf{C}'}{|\mathbf{Y}'^{(k-1)}|}$$

$$= I_m - \mathbf{C}'^T \mathbf{C}' \tag{9}$$

の最大固有値が1より小さいことである。行列  $S$  の固有値を  $\lambda$  とすると (10) 式を得る。

$$|\lambda I_m - S| = \begin{vmatrix} \lambda & \varepsilon_{12} & \dots & \varepsilon_{1m} \\ \varepsilon_{21} & \lambda & \dots & \varepsilon_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varepsilon_{m1} & \varepsilon_{m2} & \dots & \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{10}$$

ここで  $\varepsilon_{ij}$  は  $\mathbf{C}'^T \mathbf{C}'$  の性質から必ず大きさが1未満である。

$$|\varepsilon_{ij}| < 1 \tag{11}$$

固有値  $\lambda$  は (10) 式を満たすが、仮に  $|\lambda| \geq 1$  とすれば  $|\varepsilon_{ij}| < 1$  からこの行列式の各列ベクトルは必ず1次独立になり行列式の値は零になり得ない。これは矛盾なので  $|\lambda| < 1$  となる。このため、(10) 式の条件は常に成り立ち (8) 式は絶対に安定な反復解を与える。これは、状態遷移行列  $S$  の最大絶対値を持つ対角要素が近似的に最大固有値に等しいためである。

3. 準3次元電流分布推定

立方体内の電流分布が生ずる立方体の6面に垂直な方向の磁界成分から2次元電流分布がそれぞれ得られる。このようにして得られた2次元電流分布をベクトル的に合成することで、準3次元電流分布が得られる<sup>1)</sup>。

3.1 実験

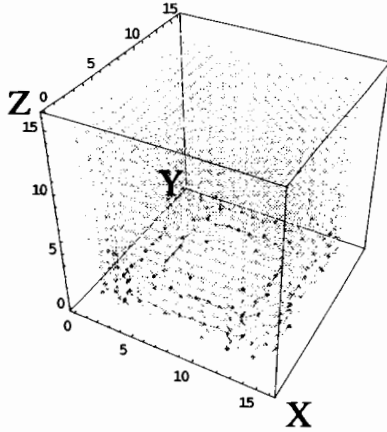
励磁コイルは内半径2cm、外半径10cm、のドーナツ状のものを作成し、電流を0.1A通電した。1面につき、測定面のx, y方向の長さはそれぞれ16cm、電流分布推定面のx, y方向の長さもそれぞれ16cmとする。また、立方体各面へ垂直な磁界の測定点数はx, y方向共に8点とした。従って、全体の磁界測定点数は6×8×8=384点である。

実験は、立方体内のコイル位置を3回変更して磁界分布を測定した。Fig.1 に示すX-Y-Z座標系で、1回目はコイルをX-Y平面に平行に配置して測定し(Case 1)、2回目はコイルをX-Y平面に対して45度、Y-Z平面に対して垂直方向に配置して測定し(Case 2)、3回目はX-Y平面に対して45度、Y-Z平面に対して垂直方向となる平面上でコイルを45度回転させて配置し、測定した(Case 3)。立方体各面に垂直な方向で測定された磁界分布からGVSPM法で推定された2次元電流分布を用いて得られた準3次元電流分布を Fig.1 に示す。ここで、電流分布の推定点数は15×15×15=3375個である。

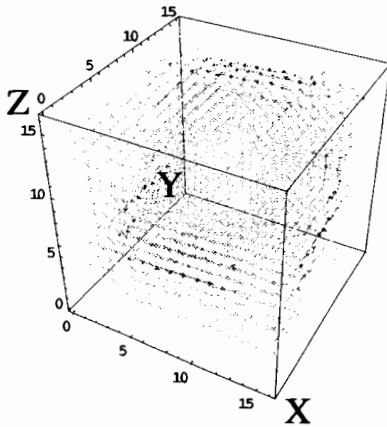
この結果からコイルをX-Y平面に平行に配置した場合は準3次元電流分布がGVSPM法を用いて比較的高精度で推定可能であることが確認できた。しかしながら、コイルをX-Y平面に対して45度、Y-Z平面に対して垂直方向に配置した場合と、X-Y平面に対して45度、Y-Z平面に対して垂直方向となる平面上でコイルを45度回転させ

て配置した場合は、コイルをX-Y平面に平行に配置した場合と比較して電流分布の推定精度が低下していることが分かる。これは、コイルの作る磁界の主要成分を立方体のいずれの面でも測定できないためと考えられる。

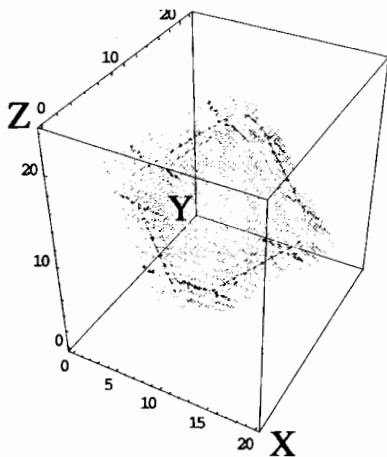
すなわち、電流の生ずる磁界分布の主要成分が立方体の6面のいずれかで測定される場合、最も良好に準3次元電流分布が推定される。



(a) Case 1



(b) Case 2



(c) Case 3

Fig. 1 Quasi-3D current vector distributions

#### 4. 3次元ベクトルウェーブレット変換<sup>2)</sup>

3次元ウェーブレット変換は、3次元行列の転置を

$$\begin{aligned} [\mathbf{H}_{lmn}]^T &= \mathbf{H}_{nlm} \\ [\mathbf{H}_{nlm}]^T &= \mathbf{H}_{mnl} \\ [\mathbf{H}_{mnl}]^T &= \mathbf{H}_{lmn} \end{aligned} \quad (12)$$

と書けば、

$$\mathbf{S} = [\mathbf{W}_l \cdot [\mathbf{W}_m \cdot [\mathbf{W}_n \cdot \mathbf{H}_{lmn}]^T]^T]^T \quad (13)$$

で与えられる。ここで、 $\mathbf{S}$ はウェーブレットスペクトラム、 $\mathbf{H}$ は $l \times m \times n$ の3次元行列、 $\mathbf{W}_l$ 、 $\mathbf{W}_m$ 、 $\mathbf{W}_n$ は、それぞれ $l \times l$ 、 $m \times m$ 、 $n \times n$ のウェーブレット変換行列である。さらに、磁界ベクトル $\mathbf{H}$ が $x, y, z$ 方向の3成分 $X, Y, Z$ から成るベクトル

$$\mathbf{H} = X + Y + Z \quad (14)$$

であるとき、(12)、(13)式より

$$\mathbf{S} = [\mathbf{W}_l \cdot [\mathbf{W}_m \cdot [\mathbf{W}_n \cdot (X + Y + Z)]^T]^T]^T \quad (15)$$

が得られる。ここで $X, Y, Z$ はそれぞれ直交するベクトルであるから(14)式は、

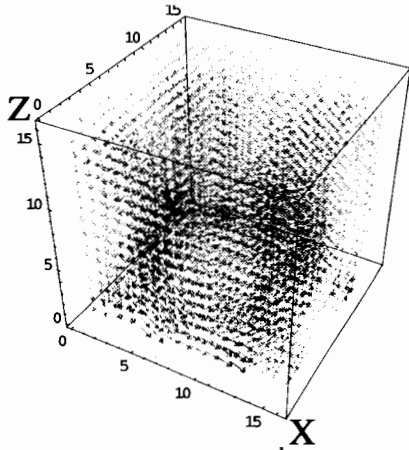
$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= [\mathbf{W}_l \cdot [\mathbf{W}_m \cdot [\mathbf{W}_n \cdot X]^T]^T]^T \\ &\quad + [\mathbf{W}_l \cdot [\mathbf{W}_m \cdot [\mathbf{W}_n \cdot Y]^T]^T]^T \\ &\quad + [\mathbf{W}_l \cdot [\mathbf{W}_m \cdot [\mathbf{W}_n \cdot Z]^T]^T]^T \end{aligned} \quad (16)$$

となる。すなわちベクトルデータのウェーブレット変換スペクトラムは各成分のウェーブレット変換スペクトラムを成分とするベクトルである。

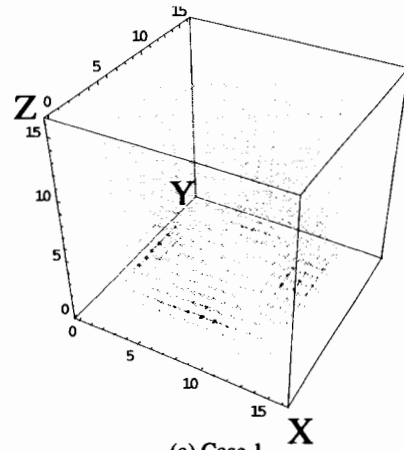
#### 5. 電流ベクトルのコンポリューション

異なる基底関数、本稿ではドビュッシー2次、8次、16次を用い、マザーウェーブレット近傍の $8 \times 8$ のスペクトラムを残し、残りを零とする領域法を用いて主要電流ベクトル分布を抽出した。Fig.2にCase 1の主要準3次元電流ベクトル分布を示す。ただし、ウェーブレット変換を適用するため、元のデータに零を追加し、データ数を $16 \times 16 \times 16$ としている。

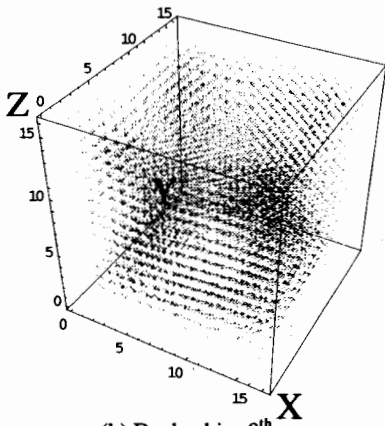
異なる基底関数を用いたウェーブレット変換で抽出された支配的な電流成分をそれぞれの最大値を1へ正規化した後、電流成分を格納した配列要素間の積を計算する。すなわち、ウェーブレット変換で抽出された支配的な電流間の畳み込み演算を行うことで何れのウェーブレット変換基底関数に対しても共通となる不変な電流分布を抽出する。Case 2、Case 3についてもCase 1と同様に計算を行った。Fig.3が畳み込み演算結果である。



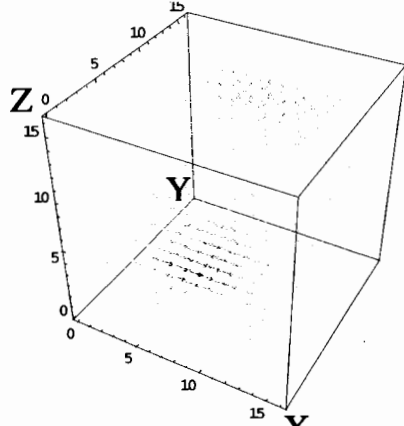
(a) Daubechies 2<sup>nd</sup>



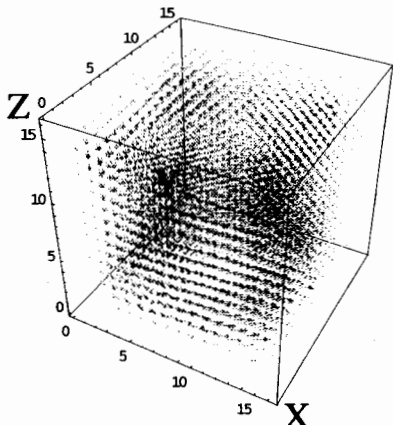
(b) Case 1



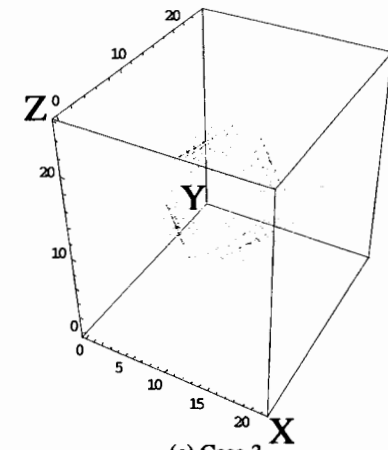
(b) Daubechies 8<sup>th</sup>



(b) Case 2



(c) Daubechies 16<sup>th</sup>



(c) Case 3

Fig. 2 Quasi-3D current vector distributions; the top, middle and bottom figures are employed the daubechies 2<sup>nd</sup>, 8<sup>th</sup> and 16<sup>th</sup> order base functions, respectively

Fig. 3 Convoluted quasi-3D current vector distributions

## 6. 結論

本稿では立方体の外側6面で測定された局所的な磁界分布から一般化ベクトルSPM法を用いて準3次元電流分布推定を行い、ノイズ処理の一方法として、異なる基底関数を用いて主要電流ベクトルを抽出し、何れの基底関数でも共通となる電流ベクトルを畳み込み演算で抽出する方法を提案した。

その結果、電流の生ずる磁界分布の主要成分が立方体の6面のいずれかで測定される場合、最も良好に電流分布が推定できることが判明した。また、閾値演算を適用

することなく、主要な電流ベクトル分布を抽出することに成功した。

## 参考文献

- 1) 宮原晋一郎, 早野誠治, 斎藤兆古: “準3次元電流分布測定法とその応用”, 電気学会マグネティクス研究会資料, MAG-99-153, (1999).
- 2) 松山佐和, 小口雄康, 宮原晋一郎, 斎藤兆古: “3次元ウェーブレット変換の応用”, 日本シミュレーション学会第19回計算電気・電子工学シンポジウム論文集, 1998年, pp.211-214.