

# 準解析的方法による電磁界解析手法の提案

—導体間のキャパシタンスについて—

渡澤 泰之\*, 早野 誠治, 斎藤 兆古

(法政大学工学部)

Quasi-analytical electromagnetic field analysis

—Consideration of capacitive effects—

Yasuyuki Watazawa, Seiji Hayano and Yoshifuru Saito (Hosei University)

## Abstract

In order to evaluate the electromagnetic fields, it is essential to solving for the Maxwell's equations. Since it is difficult to solve the Maxwell's equations analytically for the most practical problems, then numerical solution strategy is widely used. Any numerical methods of solution are powerful but require a lot of computational resources for the practical three-dimensional electromagnetic field computations. Further, it is essential to use an enormous number of mesh points in order to obtain a higher accurate solution.

Any of the numerical methods for electromagnetic field analysis essentially require a subdivision of a problem region. By notifying this subdivision, we have previously proposed a new methodology by applying the analytical solution to each of the discretized parts. The first trial of this quasi-analytical electromagnetic field computational methodology has made it possible to simulate the complex electromagnetic field distributions not obtainable by the conventional numerical schemes, such as finite elements and boundary elements means.

However, our quasi-analytical method encounters some difficulty when analyzing the high frequency electromagnetic field distribution because of the displacement currents. In the present paper, we propose a new quasi-analytical approach taking the displacement currents into account to overcome this difficulty.

キーワード：準解析的方法, キャパシタンス, フィルム状導体  
(quasi-analysis, capacitance, film conductors)

## 1. はじめに

小型・軽量・高性能な個人用計算機 (Personal Computer, 以下、PC と略記) は、その多機能化と低価格化により広汎な普及を遂げている。従来、電磁界の数値解析は極めて大規模の計算となるため、大型計算機で行われていた。しかし、近年の高性能 PC の普及は電磁界解析を個人レベルで可能とし、商用電磁界解析パッケージも販売されるに至っている。また、電気電子機器の高性能化に伴い、高周波動作を前提とする磁気素子が増加している。これは、電磁界解析において、磁気素子の抵抗やインダクタンスを集中定数として考えることが困難なことを意味している。一方、電磁界解析は、電磁界を支配する方程式が偏微分方程式であることから、微分を有限差分で直接置き換える有限差分法 (Finite Difference Method)、変分原理に基づく有限要素法 (Finite Element Method) などの数値解析法で行われる。また、電磁界が無窮遠点まで広がる開領域問題に対しては、偏微分方程式の基本解を仮定した境界要素法 (Boundary Element Method) などの積分方程式形解析法が採用される。何れの数値解析法も空間・時間領域を細分化し、細分化された個々の領域で解析的な関数を仮定して解

くのが共通の特徴である。

本論文で述べる準解析的電磁界解析法とは、古典的な解法による解析解と、現代の問題対象領域を細分化して解く方法を組み合わせたものである。問題対象領域を細分化する作業は、従来の数値解析法と同じである。しかし、細分化する過程は大幅に異なる。従来の数値解析法は、細分化された個々の領域で比較的簡単に解析的な解を仮定するため、細分化の方法に比較的自由度が高い。しかし、準解析的方法は、細分化された個々の領域で解析解を仮定するため、細分化の方法は限定され、自由度は少ない。しかしながら、従来の方法は、細分化した領域で、解の形を仮定するのみであるから、高精度な解を得るためには大規模計算が必要となる。他方、準解析的方法は、細分化する時点で解析解を前提とするため、比較的小規模な計算で高精度な結果が得られる。また、解析解の組み合わせで定式化を行うため、閉領域・開領域に無関係に両者を包含した解を与える。すなわち、有限要素法と境界要素法、または、微分方程式法と積分方程式法を包含した解析法が準解析的電磁界解析法である。

このような観点から筆者らは準解析的方法を提唱し、その有効性を従来の数値解析では不可能であった問題を解

析可能とすることで報告してきた<sup>(1)(2)</sup>。筆者等の提唱する準解析的方法に対して、指摘された唯一の問題点は、変位電流が勘案されていない点であった。本論文は、変位電流を導体間のキャパシタンスとして考慮した準解析的方法の新しいモデルを提案する。その結果、本論文では、従来のキャパシタンスを考慮しない解析では解析不可能な、フィルム状導体の共振現象が解析可能なことを報告する。

## 2. 準解析的電磁界解析法

ここでは、本論文で採用するフィルム状導体の例を取り上げて解析手法の原理を説明する。まず、図1に示す「コ」の字型のフィルム状導体について考える。このフィルム状導体の両端に均一に電圧が印加されているとする。ここで、図1(a)に示すように、電流の通電方向を勘案して、フィルム状導体を解析的な取り扱いが容易な  $m$  個の丸型導体へ分割する。対面する上下の2面に対して側面は十分に小さいので、この面による影響は受けないものとする。丸型導体モデル中の2本を図1(b)に示す。

丸型導体の長さはフィルム導体の長さと同じとし、断面積はフィルム導体の断面積の  $1/m$  とする。すなわち、フィルム導体の体積は丸型導体の体積の総和に等しい。これは、丸型導体の数  $m$  を無限大とした場合にフィルム導体を再現可能とする条件による。

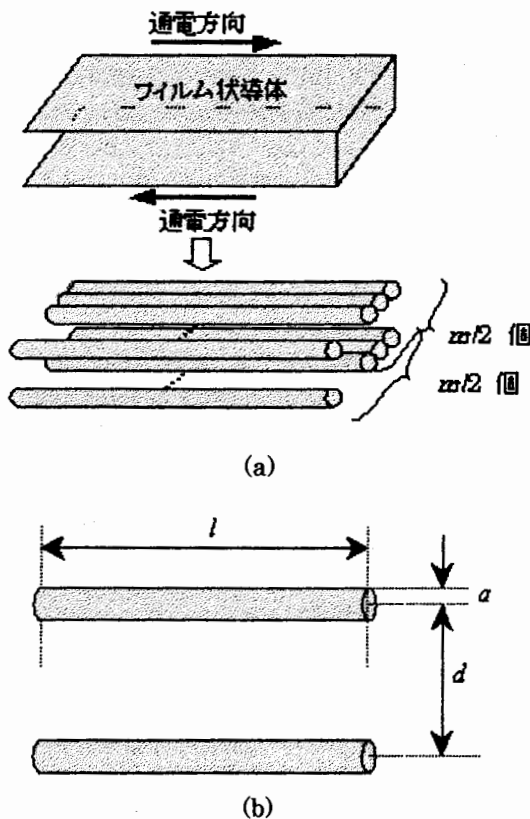


図1. フィルム状導体のモデリング

個々の丸型導体の電気抵抗  $r$  と自己インダクタンス  $L$  は解析的に計算可能であり、次式で与えられる。

$$r = \sigma \frac{l}{\pi a^2} \quad (1)$$

$$L = \frac{\mu_0}{8\pi} l + \frac{\mu_0}{2\pi} l \left[ \ln \left( \frac{2l}{a} \right) - 1 \right] \quad (2)$$

ここで、 $\sigma, a, l, \mu_0$  はそれぞれ、抵抗率、丸型導体の半径、長さおよび真空中の透磁率である。

図1のモデルでは同一丸型導体が平行に配置されているから、導体間に磁束による相互結合が存在し、この相互結合は相互インダクタンス  $M_{ij}$  で表される。さらに、丸型導体間に存在する変位電流はキャパシタンス  $C_{ij}$  で表される。フィルム状導体の面積を  $S$  と置くと、それぞれ次式によって与えられる。

$$M_{ij} = \frac{\mu_0}{2\pi} \left[ \ln \left( \frac{l + \sqrt{l^2 + d_{ij}^2}}{d_{ij}} \right) - \sqrt{1 + \left( \frac{d_{ij}}{l} \right)^2} + \frac{d_{ij}}{l} \right] \quad (3)$$

$$C_{ij} = \frac{\epsilon_0 S}{d_{ij} m} \quad (4)$$

ここで、下添え字  $ij$  は第  $i$  番目と  $j$  番目の丸型導体を示し、 $d_{ij}$  は第  $i$  番目と  $j$  番目の丸型導体間の距離である。

従って、分割個数  $m=4$  の場合、図1(a)のフィルム状導体は、図2の等価回路によって表される。すなわち、フィルム状導体の電流分布解析問題は、図2に示す等価回路を複数個組み合わせた電気回路解析問題へ帰する。

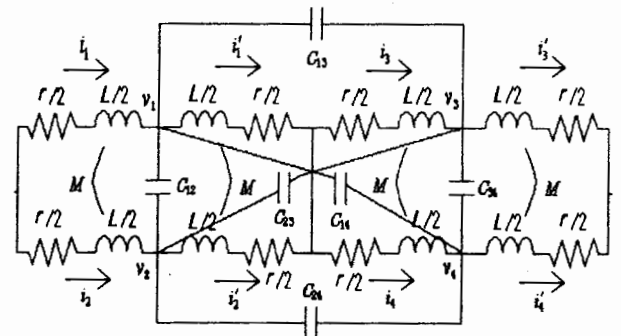


図2. 等価回路

ただし、図2の等価回路において、相互インダクタンス、キャパシタンスについては、面に関係なくすべての丸型導体間同士に存在するものとする。

ここで、上下のフィルム状導体の直列接続部の電圧を  $v$  とする。そして、 $X, Y$  を (5b)(5c) 式のようにそれぞれ状態変数ベクトルと入力ベクトルとすれば、この等価回路の定常状態におけるシステム方程式は次式で与えられる。

$$Y = DX \quad (5a)$$

$$X = \begin{bmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_m & i'_1 & i'_2 & \cdots & i'_m \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_m & v' & & & \end{bmatrix} \quad (5b)$$

$$Y = \begin{bmatrix} \overbrace{v \ v \ \cdots \ v}^{m/2} & \overbrace{0 \ 0 \ \cdots \ 0}^{2m+1} \end{bmatrix}^T \quad (5c)$$

ここで、 $m$ 行  $m$ 列の零行列を  $0_{m \times m}$ 、単位行列を  $I_{m \times m}$  列とすると行列  $D$  は次式で与えられる。

$$D = \begin{bmatrix} R+L & 0_{m \times m} & I_{m \times m} & K_1^T \\ 0_{m \times m} & R+L & -I_{m \times m} & K_2^T \\ I_{m \times m} & -I_{m \times m} & C & 0_{m \times 1} \\ K_1 & K_2 & 0_{1 \times m} & 0 \end{bmatrix} \quad (6a)$$

$$R = \begin{bmatrix} r & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & r & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & r \end{bmatrix} \quad (6b)$$

$$L = \begin{bmatrix} j\omega L & j\omega M_{12} & \cdots & j\omega M_{1m} \\ j\omega M_{21} & j\omega L & \cdots & j\omega M_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ j\omega M_{m1} & j\omega M_{m2} & \cdots & j\omega L \end{bmatrix} \quad (6c)$$

$$C = \begin{bmatrix} j\omega \sum_{j=1}^m C_{1j} & j\omega C_{12} & \cdots & j\omega C_{1m} \\ j\omega C_{21} & j\omega \sum_{j=1}^m C_{2j} & \cdots & j\omega C_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ j\omega C_{m1} & j\omega C_{m2} & \cdots & j\omega \sum_{j=1}^m C_{mj} \end{bmatrix} \quad (6d)$$

$$K_1 = \begin{bmatrix} \overbrace{0 \ 0 \ \cdots \ 0}^{m/2} & \overbrace{1 \ 1 \ \cdots \ 1}^{m/2} \end{bmatrix} \quad (6e)$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} 1 \ 1 \ \cdots \ 1 & 0 \ 0 \ \cdots \ 0 \end{bmatrix} \quad (6f)$$

(6a)式に示される様に、行列  $D$  は正方行列であるから、 $D$  の逆行列を(5a)式のシステム方程式の両辺にかけることにより、(7)式を得ることが出来る。

$$X = D^{-1}Y \quad (7)$$

従って、(7)式より得られた  $X$  から、 $i$ 番目の丸型導体に流れる電流を  $I_i$  とすると、電流ベクトル  $I$ 、フィルム全体の総電流  $i$  は次式によって求められる。

$$I = \begin{bmatrix} I_1 & I_2 & \cdots & I_{m/2} \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$= \begin{bmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_{m/2} \end{bmatrix}$$

$$i = \sum_{j=1}^{m/2} i_j \quad (9)$$

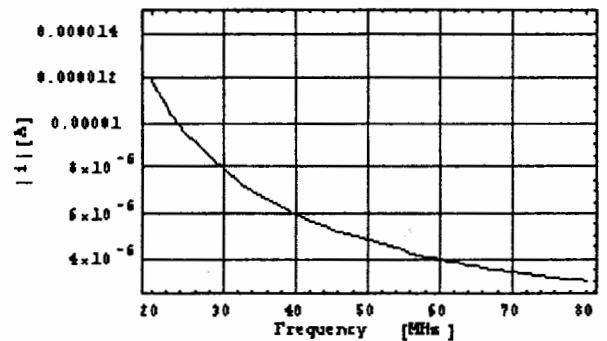
### 3. 例題

準解析的方法による計算例として、図1に示すフィルム状導体について考える。計算で用いたフィルム状導体の諸定数を表1に示す。

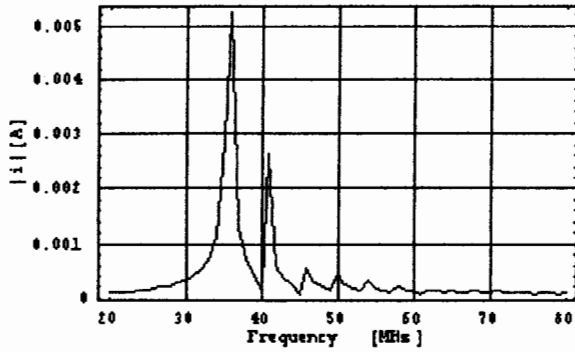
表1. フィルム状導体の諸定数

| フィルムの材質       | 銅                                      |
|---------------|--|
| 銅の抵抗率         | $1.72 \times 10^{-8} [\Omega \cdot m]$ |
| フィルムの大きさ (1面) | 幅 5[cm] × 長さ 30[cm]                    |
| 上下のフィルム間の距離   | 0.5[cm]                                |
| 丸型導体の半径       | $3.98 \times 10^{-3}$ [cm]             |
| 分割個数 (1面)     | 400 (200)                              |
| 印加電圧          | 1.0[mV]                                |

図3に電流対周波数特性を示す。電流は(9)式により求められる各丸型導体に流れる電流の総和である。また、比較のため、変位電流を考慮していない(キャパシタンスが入っていない)モデルによる電流も示す。なお、変位電流を考慮しない場合の計算方法は、参考文献(1)(2)を参照して頂きたい。



(a) 従来の準解析的方法による解

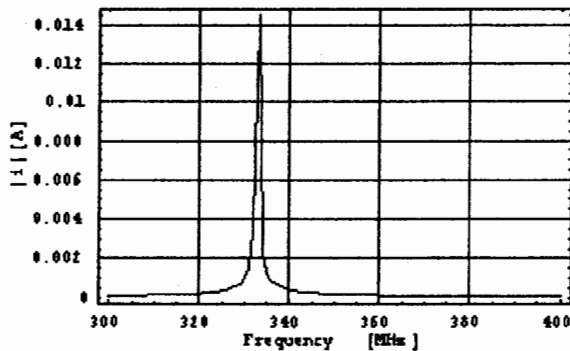


(b) 変位電流を考慮した準解析的方法による解

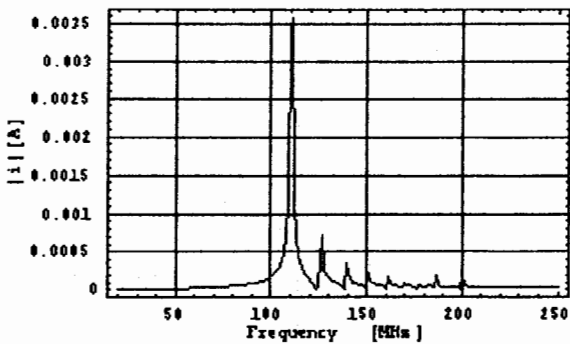
図3. 電流対周波数特性

図3より、変位電流を考慮しないモデルの場合図3(a)で、当然ではあるが等価回路にキャパシタンスが存在せず、実質的に  $R-L$  直列回路である。従って、電流は周波数の増加と共に減少する。他方、変位電流を考慮した場合図3(b)では、明らかに直列共振が確認できる。また、共振点は単一ではなく複数個存在する。これは、フィルムを複数個の丸型導体に分けて分布定数系として計算していることに起因する。

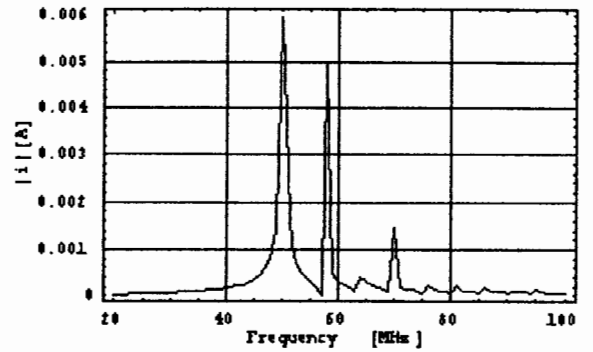
次に、分割個数を変えた場合の計算結果を図4に示す。



(a)  $m=4$



(b)  $m=40$



(c)  $m=200$

図4. 電流対周波数特性

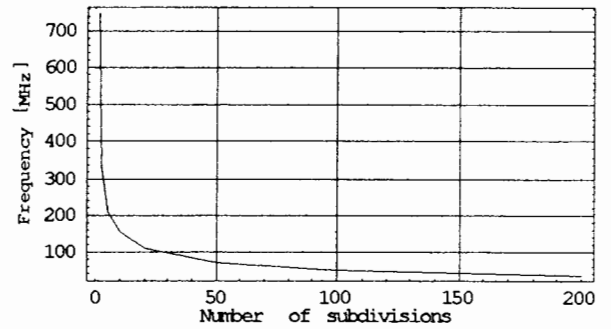


図5. 分割個数と共振周波数の関係

分割個数が4個の場合は、共振点が1個である。しかし、分割個数を増やすと共振点が複数確認でき、共振点の中でも最も低周波数に最大電流となる共振点が存在し、高周波数の共振点程、共振電流は小さくなる。また、分割個数の増加は共振周波数を低下させる。図5に分割個数と最大の共振を与える周波数との関係を示す。図5より、両者は双曲線関係にあり、共振周波数は、分割個数の増加に伴い一定値に収束していることが確認できる。これは、高周波の電流分布が分割個数が少ないと正確に表現できないためである。すなわち、準解析的方法が分割した丸型導体の断面積が無小、つまり分割個数が無限大で厳密解を与えるためである。

次に、図6に(8)式による図3(b)の電流分布対周波数特性を示す。また、図7に変位電流分布対周波数特性を示す。

一般に、磁界は表皮効果を喚起し、電界は近接効果を喚起する。図6から、低周波領域では表皮効果によって電流はフィルムの両端に方寄る。しかし、高周波領域では、近接効果により電流がフィルム導体中心部へ集中する。表皮効果と近接効果の影響がほぼ等しい周波数帯域で、共振現象が喚起されることが判る。すなわち、磁界が系に支配的である周波数から電界が支配的になる臨界周波数近傍で、電界と磁界のエネルギーが拮抗し、共振現象が起こることが解明された。共振周波数よりも高周波領域では、電界が支配的となり、図6と図7から、電流はほぼ均一に分布する。すなわち、共振周波数以上の周波数帯域で、電流はほ

とんど導体間を流れず、キャパシタンスを形成する空間を流れていることが判る。

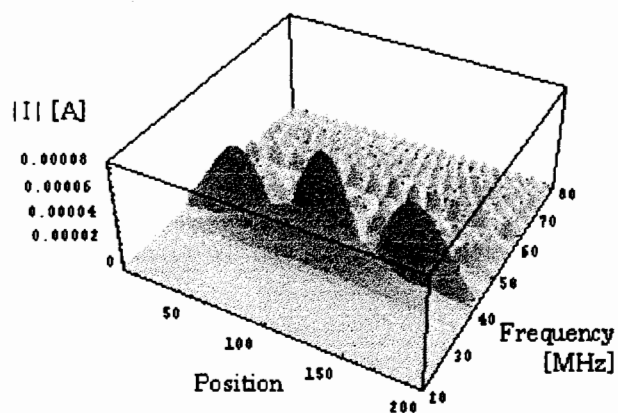


図6. 電流分布対周波数特性

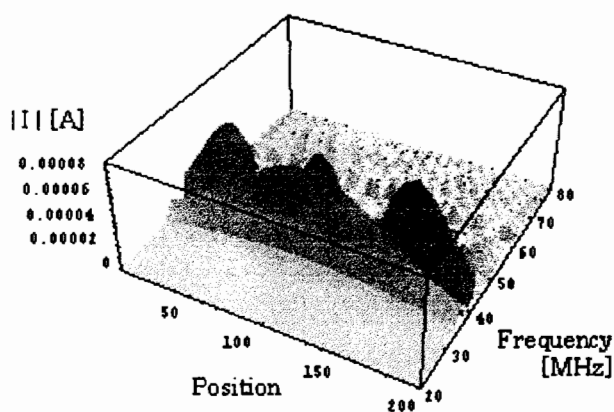


図7. 変位電流分布対周波数特性

#### 4. まとめ

本論文では、電磁界解析法として変位電流を考慮に入れた新しい準解析的方法を提案し、フィルム状導体の電流分布の解析に応用した。その結果、従来の準解析的方法では解析できなかった分布定数系の共振を解析可能とし、低周波数領域では表皮効果、高周波数領域では近接効果が支配的となり、両者の効果が同程度である周波数で共振現象が呈されることを解明した。

#### 参考文献

- (1) T.Takano, S.Hayano, and Y.Saito, "Coil impedance computation having arbitrary geometrical shape," IEEE PESC'98, Vol.2, May (1998) .
- (2) 渡澤泰之、早野誠治、斎藤兆古、"準解析的方法による電磁界解析手法の提案," マグネティックス研究会資料、MAG-00-117、(2000) .

原稿受付日

平成12年10月17日