

重み付き逆行列法による電流分布の可視化

Currents Visualization By Weighted Inverse Matrix Method

高橋 広幸*、早野 誠治、斎藤 兆古
法政大学 工学部

H.Takahashi, S.Hayano, and Y.Saito
College of Engineering, Hosei University

Abstract

Electromagnetic field coming from the printed circuit board (PCB) is becoming a serious electromagnetic noise source with the developments of modern electronics devices. In order to reduce the noise coming from the PCB, it is essentially reduced into visualize the current distribution on the PCB.

The visualization of current distribution from locally measured magnetic fields is always reduced into a solution of ill-posed inverse problem. Thus, this paper proposes a new approach for this type of inverse problem. We try to evaluate a unique solution of this inverse problem by the weighted inverse matrix method. As a result, we have succeeded in obtaining a unique solution that corresponds well with the physically existing solution.

キーワード：逆問題、電磁界分布、プリント基板、重み付き逆行列法
(Inverse problem, Magnetic fields, Printed circuit boards, Weighted inverse matrix method)

1. まえがき

近年のパーソナルコンピュータに代表される、電気・電子機器は高機能化・高集積化によって、それらの動作速度の高速化が実現されている。しかし、一方では装置周辺へ放射する磁界ノイズの大きさと周波数も増加し、電磁環境工学的観点から、何らかの対策が必要であると考えられる。

放射電磁界の源であるプリント基板上の電流分布を可視化することは、電気・電子機器の漏洩電磁界を最小にするために、有用である。電気・電子機器の周辺磁界分布から電流分布を可視化することは逆問題を解くことに帰する。

逆問題を解くことは一般に不適切な線形システムを解くことに帰する[1, 2]。不適切な線形システムとは、解が一意に求まらないか、解が存在しないものである。そのため、逆問題はニューラルネットワーク法、SPM法などさまざまな手法や拘束条件を課して近似的に解かれる[1-4]。

組み合わせによって任意の電流分布を表現可能な一方法として、我々は単位ループ電流モデルを用いて、システム方程式を構築した。この単位ループ電流モデルは汎用性が高く、その逆問題解析への有用性は確認されている[3-5]。単位ループ電流モデルから導かれるシステム行列の行数は磁界の測定点数に、列数は仮定したループ電流の個数に比例する。本論文では磁界を仮定するループ電流の個数より多くの位置で測定するため、システム行列は縦長の長方形行列となり、単純な逆行列演算を適用することが出来ない。そこで本論文では新しい逆問題解析法である重み付き逆

行列法を提案する[6]。

この手法は、最小自乗法をはじめとする一般化逆行列法の概念を拡張した方法であり、実際の物理系で遭遇する実用的な逆問題解析に有効な方法である。一般化逆行列法は汎用的な解法であるが、重み付き逆行列法は解ベクトルが級数展開可能であると仮定する。多くの物理系において解ベクトルの形は解が存在する空間座標の連続関数として表される。重み付き逆行列法は解ベクトルが空間座標の関数として級数展開可能であることを仮定し、展開された級数の係数を決定することで逆問題の解を得る方法である。

本論文では重み付き逆行列法の適用により、良好にプリント基板の電流分布情報が得られ、重み付き逆行列法は不適切な線形システムの解法として有力な手法であることを報告する。

2. 重み付き逆行列法

2.1. 重み付き逆行列法の原理

一般に、逆問題のシステム方程式は次式で与えられる。

$$\mathbf{Y} = \mathbf{D}\mathbf{X} \quad (1)$$

(1)式の、 \mathbf{Y} 、 \mathbf{X} はそれぞれ p 次の入力ベクトル、 q 次の

解ベクトル。 \mathbf{D} は p 行 q 列のシステム行列である。

(1)式のシステム行列の式数 p が、未知数 q よりも常に多い場合、縦長の長方形行列になる。この場合、すべての式を満足する

解が得られるとは限らない。このような不適切問題の近似解を、重み付き逆行列(Weighted Inverse Matrix, 以下WINと略記)法により導くことを考える。(1)式の入力ベクトル \mathbf{Y} を(2)式のように仮定する。

$$\mathbf{Y} = \mathbf{W} \cdot \mathbf{s} \quad (2)$$

$$\mathbf{s} = [\mathbf{W}^T \mathbf{W}]^{-1} \mathbf{W}^T \mathbf{Y} \quad (3)$$

ここで \mathbf{W} は重み行列である。重み行列は仮定した関数系で決定する p 行 q 列の長方形行列であり、 \mathbf{s} は q 次の係数ベクトルである。(2)式を(1)式に代入すると(4)式が得られる。

$$\mathbf{D}\mathbf{X} = \mathbf{W} \cdot \mathbf{s} \quad (4)$$

(3)式の係数ベクトル \mathbf{s} を(4)式に代入して、解ベクトルは(5)式で与えられる。

$$\mathbf{X} = [\mathbf{W}^T \mathbf{D}]^{-1} \mathbf{W}^T \mathbf{Y} \quad (5)$$

2. 2. 重み行列

WIN法は解が空間座標の関数として級数展開可能であると仮定し、展開される級数の係数を決定することで解を得る方法である。本論文においては解がフーリエ級数展開可能であると仮定する。換言すれば、得られる p 個の解を三角関数によって q 個に内挿することに他ならない。

$$\begin{aligned} Y(x, y) &= \mathbf{W} \cdot \mathbf{s} \\ &= s_0 + s_1 \cos x + s_2 \sin x + s_3 \cos y + s_4 \sin y \\ &\quad + s_5 \cos x \cos y + s_6 \cos x \sin y + s_7 \sin x \cos y \\ &\quad + s_8 \sin x \sin y + \dots \end{aligned} \quad (6)$$

(6)式において入力が存在する空間 x 、 y が、それぞれ Δx 、 Δy ずつ、 $p_x \times p_y$ 個の領域に分解されたとすれば(7)式のように重み行列が表される。

$$\mathbf{Y} = \mathbf{W} \cdot \mathbf{s} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & \cos \Delta x & \sin \Delta x & \cos \Delta y \\ 1 & \cos 2\Delta x & \sin 2\Delta x & \cos 2\Delta y \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cos(p-1)\Delta x & \sin(p-1)\Delta x & \cos(p-1)\Delta y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_0 \\ s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_{q-1} \end{pmatrix} \quad (7)$$

3. 電流分布推定

本論文における逆問題は、プリント基板上で測定した磁界分布からプリント基板上の電流分布を推定することである。単位ループ電流モデルを仮定し、表面電流分布を微小ループ電流に離散

化する。それぞれのループ電流に起因する磁界分布をベクトル化して、構成されるシステム行列から線形システムを導く。推定される2次元の表面電流分布は、線形システムの解を重み係数としたループ電流の線形結合で与えられる。

3. 1. 単位ループ電流モデル

単位ループ電流モデルは、電流が分布する測定対象導体を図1に示すように $m \times m$ 個の微小長方形に分割し、それぞれの微小長方形中にループ電流を $C_{m \times m}^{(k)}$ として仮定する。

$$C_{m \times m}^{(k)} \in u(x_i, y_j) \quad (8)$$

$$i = 1, 2, \dots, m \quad j = 1, 2, \dots, m \quad k = 1, 2, \dots, m \times m$$

(8)式の間数 $u(x_i, y_j)$ は、仮定した対象導体表面の (x_i, y_j) 点においてのみ1の値をとる。

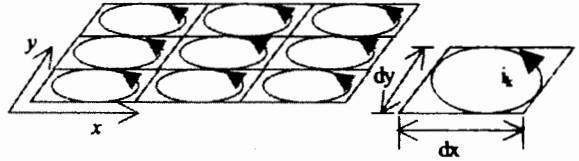


図1. 単位ループ電流モデル

3. 2. システム方程式

3. 2. 1. 入力ベクトル

プリント基板上で測定した $n \times n$ 箇所の磁界分布 $H_{n \times n}$ は、次式で表される。

$$H_{n \times n} \in f_x(x_i, y_j) f_y(x_i, y_j) f_z(x_i, y_j) \quad (9)$$

$$i = 1, 2, \dots, n \quad j = 1, 2, \dots, n$$

(9)式で、関数 f_x, f_y, f_z は $x-y$ 座標軸の (x_i, y_j) 点における x, y, z 方向の3成分の磁界分布要素を表している。

この磁界分布の要素を(3)式のように列ベクトルに並び変えることにより、 $3 \times n \times n$ 次の入力ベクトル \mathbf{Y} を作成する。

$$\mathbf{Y} = [f_x(x_1, y_1) f_x(x_2, y_1) \dots f_x(x_n, y_1) f_x(x_1, y_2) f_x(x_2, y_2) \dots, f_x(x_n, y_2) \dots, f_x(x_{n-1}, y_n) f_x(x_n, y_n), f_y(x_1, y_1) f_y(x_2, y_1) \dots f_y(x_n, y_1) f_y(x_1, y_2) f_y(x_2, y_2) \dots, f_y(x_n, y_2) \dots, f_y(x_{n-1}, y_n) f_y(x_n, y_n), f_z(x_1, y_1) f_z(x_2, y_1) \dots f_z(x_n, y_1) f_z(x_1, y_2) f_z(x_2, y_2) \dots, f_z(x_n, y_2) \dots, f_z(x_{n-1}, y_n) f_z(x_n, y_n)]^T \quad (10)$$

3. 2. 2. システム行列

単位ループ電流モデルをプリント基板上に仮定する。それぞれのループ電流 $C_{m \times m}^{(k)}$ に起因する $n \times n$ 個の磁界分布 $D_{n \times n}^{(k)}$ は、

$$D_{n \times n}^{(k)} \in G_x^{(k)}(x_i, y_j), G_y^{(k)}(x_i, y_j), G_z^{(k)}(x_i, y_j) \quad (11)$$

$$i=1, 2, \dots, n \quad j=1, 2, \dots, n \quad k=1, 2, \dots, m \times m$$

で表される。 $G_x^{(k)}(x_i, y_j), G_y^{(k)}(x_i, y_j), G_z^{(k)}(x_i, y_j)$ は、 (x_i, y_j) 点におけるループ電流を x, y, z 、3方向の磁界成分に変換するグリーン関数を示している[3]。 k 番目のループ電流による磁界分布は、(12)式に示すようにシステム行列を構成する列ベクトルに並べ換えることで得られる。

$$d^{(k)} = [G_x(x_1, y_1), G_x(x_2, y_1), \dots, G_x(x_n, y_1), G_x(x_1, y_2), G_x(x_2, y_2), \dots, G_x(x_n, y_2), \dots, G_x(x_1, y_n), G_x(x_2, y_n), \dots, G_x(x_n, y_n), G_y(x_1, y_1), G_y(x_2, y_1), \dots, G_y(x_n, y_1), G_y(x_1, y_2), G_y(x_2, y_2), \dots, G_y(x_n, y_2), \dots, G_y(x_1, y_n), G_y(x_2, y_n), \dots, G_y(x_n, y_n), G_z(x_1, y_1), G_z(x_2, y_1), \dots, G_z(x_n, y_1), G_z(x_1, y_2), G_z(x_2, y_2), \dots, G_z(x_n, y_2), \dots, G_z(x_1, y_n), G_z(x_2, y_n), \dots, G_z(x_n, y_n)]^T \quad (12)$$

(12)式を用いて $3 \times n \times n$ 行 $m \times m$ 列のシステム行列 D が得られる。

$$D = [d^{(1)}, d^{(2)}, \dots, d^{(m \times m)}] \quad (13)$$

3. 2. 3. 電流分布の推定

(10)式による入力ベクトルと、(13)式のシステム行列を代入した(1)式のシステム方程式の解ベクトル \mathbf{X} は、要素が(8)式で示す微小ループ電流、それぞれの重み係数となる $m \times m$ 次のベクトルとなる。本論文では磁界の測定点数 $3 \times n \times n$ が、仮定するループ電流の数 $m \times m$ より多いため、システム行列は縦長の長方形行列になる。この場合、すべての式を満足する解が得られるとは限らない。このような不適切問題の近似解を与える方法として、WIN法をもちいる。(5)式より導かれた解ベクトル \mathbf{X} の各要素 x_k を(8)式に示す微小ループ電流の重み係数とすると、推

定される電流分布 $V_{m \times m}$ は、(14)式で与えられる。

$$V_{m \times m} = \sum_{k=1}^{m \times m} x_k C_{m \times m}^{(k)} \quad (14)$$

4. 例題

本論文の手法がプリント基板の電流分布推定法として、有用であるか検証するため、実際にコイルを試作し、簡単なプリント基板を想定した実験を行った。

4. 1. 単位ループ電流モデル

図2に、単位ループ電流 $C_{m \times m}^{(k)}$ の $k=21, 56, 96, 146, 171, 191$ に起因するプリント基板上の磁界分布 $D_{n \times n}^{(k)}$ の例を示す。

この実験においては、 $n=m=15$ とした。その結果、 $3 \times n \times n = 675$ 個の磁界分布から、 $m \times m = 225$ 個のループ電流を推定することになる。

4. 2. 測定磁界分布

図3に示すように、簡単なプリント基板を想定したコイルを作成した。図3(b)は(a)に示すコイルに、100kHz、0.3Aの電流を通电した場合に、 x, y, z 方向について、平均半径3.4mm、長さ6.0mmの有限長ソレノイド型サーチコイルを用いて測定した磁界分布である。

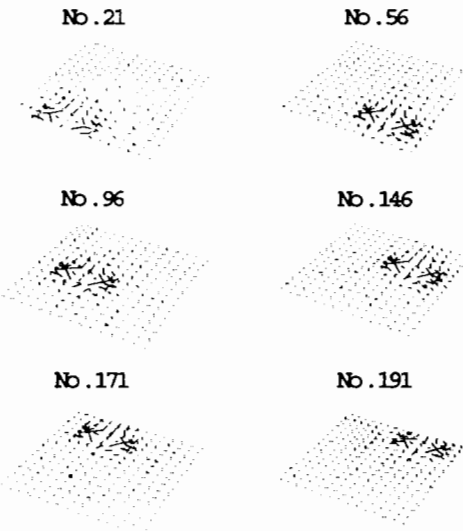


図2. 単位ループ電流による磁界分布例

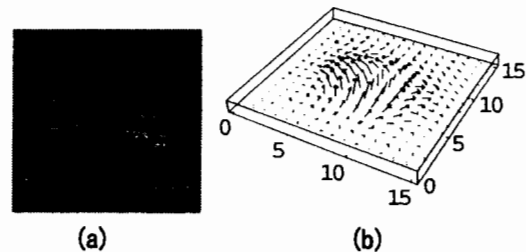


図3. (a) 供試コイルと(b) 磁界分布の測定結果

4. 3. 解ベクトル

図4に図3の磁界分布から(10)式による入力ベクトル \mathbf{Y} と、

図 2 に示したループ電流による磁界分布 $D_{ppn}^{(k)}$ から(12)、(13)式を用い $3 \times n \times n = 675$ 行 $m \times m = 225$ 列のシステム行列へWIN法を適用して得られた解ベクトル \mathbf{X} を示す。

4. 4. 電流推定

図 5(a)は、(14)式より得られたモデルコイル上のループ電流分布を示す。図中の白は正值を、黒は負値を表している。

図 5(b)は、(a)で示すループ電流分布から、隣接するループ電流間で接する点の電流を計算して得られた電流ベクトル分布の計算結果を示す[5]。図 5 からWIN法が比較的良好な結果を与えていることが確認できる。

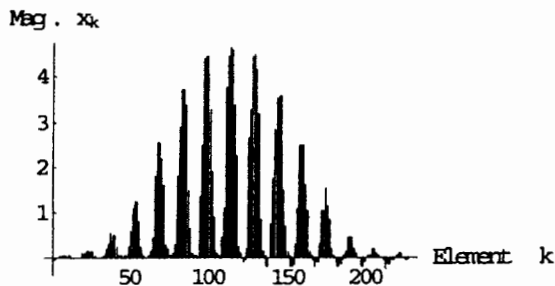
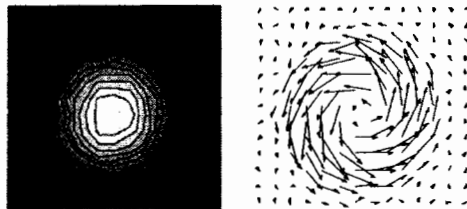


図 4. 解ベクトル \mathbf{X}



(a)ループ電流分布 (b)電流ベクトル分布

図 5. 計算結果

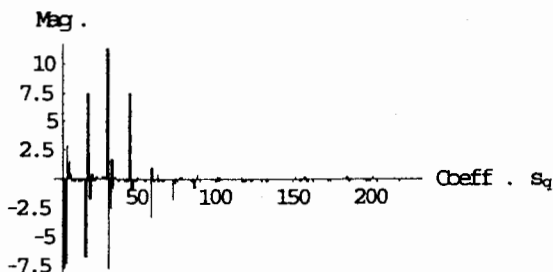


図 6. WIN解のフーリエ係数

4. 5. WIN解の妥当性

この例題では、解をフーリエ級数の第 225 項までで表現可能な関数として仮定している。得られた解のフーリエ係数を図 6 に示す。

フーリエ係数は振動的であるが、第 90 項以降は完全に収束している。従って、得られたWIN法は物理的に正しい解であると考えられる。このようにWIN法は係数の収束性を調べることであり、得られた解の物理的妥当性を客観的に評価することが可能である。よって、この例題で得られたWIN解は物理的に正しい解であることが確認できる。

5. まとめ

本論文では、電子デバイス周辺の x, y, z 方向、3次元磁界分布測定からプリント基板上の表面電流分布を推定する方法として、新しい逆問題解析法である重み付き逆行列(WIN)法を提案した。WIN法は最小自乗法をはじめとする一般化逆行列法の概念を拡張したものであり、解をある関数系で内挿して解く手法である。WIN法の妥当性を検討するため、実験を行った。その結果、重み付き逆行列法が逆問題解析法に有効であり、電流分布可視化システムの有力な手法になりえることを示した。

参考文献

- [1] T.Doi, S.Hayano and Y.Saito, "Magnetic field distribution caused by a notebook computer and its source searching", Journal of Applied Physics, Vol.79, No.8, April, 1996, pp.5214-5216
- [2] T.Doi, S.Hayano, I.Marinova, N.Ishida and Y.Saito, "Defect recognition in conductive materials by local magnetic field measurement," Journal of Applied Physics, Vol.75, No.10, May, 1994, pp.5907-5909.
- [3] H.Takahashi, S.Hayano and Y.Saito, "Visualization of the currents on the printed circuit boards," IEEE Visualization 1999 Late Breaking Hot Topics Proceedings, p.37-40.
- [4] Y.Midorikawa, J.Ogawa, T.Doi, S.Hayano and Y.Saito, "Inverse analysis for magnetic field source searching in thin film conductor", IEEE Transaction on Magnetics, Vol.MAG-33, No.5, Sep.,1997, pp.4008-4010.
- [5] N.Masuda, Y.Midorikawa, Y.Saito and H.Tohya, "A Study of Current Distributions on the Printed Circuit Boards," Trans IEE Japan, 119-A, 997-1004 (1999).
- [6] A.Takei, S.Hayano and Y.Saito, "Weighted Inverse Matrix Approach to Searching for the Radioactive Source Distributions," Proceeding of JBMSAEM'98, p.94-98.

原稿受付日 平成 12 年 10 月 17 日