

画像の支配方程式とベクトル場への応用

学生員 遠藤 久 (法政大学)
 正員 早野 誠治 (法政大学)
 正員 齋藤 兆古 (法政大学)
 非会員 國井 利泰 (法政大学)

Image Governing Equations and Its Application to Vector Fields

Hisashi Endo, Student Member, Seiji Hayano, Member, Yoshifuru Saito, Member, Toshiyasu L. Kunii, Non-member (Hosei University)

A novel image processing methodology based on the field theory is proposed to visualize the electromagnetic vector fields as well as any other vector fields. The key idea of our method is that an image is regarded as a potential field. Consequently, any images can be represented by differential equations. In the static image, the images with any resolutions can be obtained by solving for the Poisson type partial differential equations. As an application, our method is applied to the practically experimented magnetic field distributing around a DC/DC converter.

キーワード：場の理論を用いた画像処理，電磁界分布解析，有限差分法

1. まえがき

電磁界の可視化は，有限要素法などに代表されるいわゆる CAD (Computer-Aided Design) による電気電子機器の設計や EMC (Electromagnetic Compatibility) 問題などにおける電気電子デバイスの評価のみならず，電磁現象を学ぶ教育現場においても重要な役割を果たしている⁽¹⁾⁽²⁾。近年，半導体技術の進歩に伴う計算機性能の飛躍的向上は，さまざまな電磁界シミュレーションを可能にするとともにコンピュータグラフィックスに代表される可視化技術も急速に発展させた。しかしながら，電磁界は，3次元のベクトルフィールドであると同時に連続量であるため，コンピュータディスプレイなどの2次元平面にそれらを可視化するには，必然的に膨大な量のデータをハンドリングしなければならない。

筆者らが本論文で提案する画像処理方法の基本的着想は，画像データを構成する画素値をスカラーポテンシャルあるいは，ベクトルポテンシャルの1成分とみなし，画像に勾配演算 (Gradient)，発散演算 (Divergence)，回転演算 (Rotation) 等の各種ベクトル演算を導入することである⁽²⁾⁽³⁾。これは，古典物理学の集大成である場の理論と画像処理技術を結合し，あらゆる画像データが微積分学にもとづき解析できることを意味している。

本論文では，電磁界の可視化画像，特に，時間的に変化

のない静的な可視化画像に対し，場の理論を応用した画像処理手法を適用し，電磁界分布解析をおこなう。さらに，高周波スイッチングを前提としたフィルムトランスを用いた DC/DC コンバータ上に分布する磁界をカラー画像で可視化し，本画像処理手法を用いてその有用性を検証する⁽⁴⁾⁻⁽⁶⁾。

2. 画像の偏微分方程式

〈2・1〉 サンプル画像 静的画像は，大きく別けてカラー画像とモノクロ画像とに分類することができる。本論文では，図1に示すようなモノクロ画像を最初に吟味した後，カラー画像について述べ，その結果を用いて DC/DC コンバータ上の磁界分布に関する画像処理的方法を検討する。図1は，縦 (y 方向) 横 (x 方向) それぞれ 128×128 画素の解像度をもつモノクロ画像と本論文で用いる 256 段階の濃度レベルである。

〈2・2〉 勾配演算 図1のような画像を2次元スカラーフィールド U とみなすと勾配演算から発散的なベクトル E が得られる。

$$\begin{aligned}
 E &= -\nabla U \\
 &= -\frac{\partial U}{\partial x} \mathbf{i} - \frac{\partial U}{\partial y} \mathbf{j} \dots\dots\dots (1)
 \end{aligned}$$

ここで \mathbf{i}, \mathbf{j} はそれぞれ， x と y 方向の単位ベクトルである。しかしながら，計算機内において画像は，画素の集まり，すなわち，数値をマトリックス状に配置したものであ

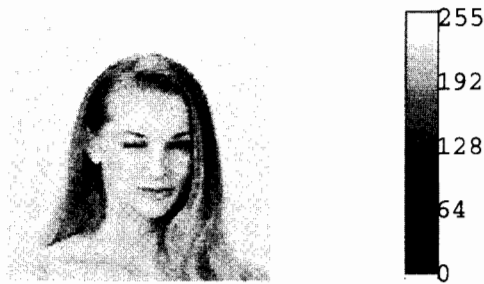


図1 原画像 (128×128 画素) と濃度レベル
Fig. 1. Original image (128×128 pixels) and contrast bar.

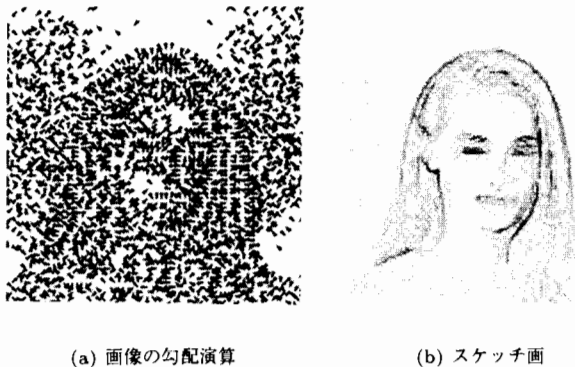


図2 画像の勾配演算によるベクトル分布
Fig. 2. (a) Vector distribution by gradient operation to an image, (b) the sketch obtained from (a).

る。スカラーポテンシャル U は、画素であるので解析的な連続関数ではなく離散値系である。このため、(1) 式の偏微分を中心差分で近似する。通常のディスプレイの場合、縦方向、横方向の画素間の距離は等しく x, y 方向の離散間隔 $\Delta x, \Delta y$ を単位長とみなせば (1) 式は、次のように近似することができる。

$$\begin{aligned} \nabla U &\simeq \frac{U_{i+1,j} - U_{i-1,j}}{2\Delta x} \mathbf{i} + \frac{U_{i,j+1} - U_{i,j-1}}{2\Delta y} \mathbf{j} \\ &\simeq \frac{U_{i+1,j} - U_{i-1,j}}{2} \mathbf{i} + \frac{U_{i,j+1} - U_{i,j-1}}{2} \mathbf{j} \dots (2) \end{aligned}$$

ここで $U_{i,j}$ は、 i 行 j 列目の画素値である。図 2(a) は、図 1 の画像データに対し、(2) 式を適用した結果である。画像の勾配演算の応用の一例として、図 2(b) に、図 2(a) で得られたベクトルのノルム分布を計算し、白黒反転することで得たスケッチ画を示す⁽⁷⁾。スケッチは、通常人間によって描かれるが、画像の勾配演算の導入により、計算機においても一定のスケッチ画を作成することが可能となる。

〈2・3〉 ラプラシアン あるベクトル量に発散演算を施すとスカラー量に変換することができる。特に、(1) 式に発散演算を施すと、微分演算子であるラプラシアンを導

くことができる。

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \nabla U &= \nabla^2 U \\ &= \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \dots \dots \dots (3) \end{aligned}$$

図 1 のような画像に (3) 式を適用するために〈2・2〉節と同様に偏微分を有限差分で近似する。本論文では、対象画像周辺の画素のみで比較的良好な精度を有する 9 点差分公式によるラプラシアンを採用する⁽⁸⁾。

$$\begin{aligned} \nabla^2 U &\simeq \frac{1}{6} [U_{i-1,j-1} + 4U_{i-1,j} + U_{i-1,j+1} \\ &\quad + 4U_{i,j-1} + 4U_{i,j+1} + U_{i+1,j-1} \\ &\quad + 4U_{i+1,j} + U_{i+1,j+1} - 20U_{i,j}] \dots \dots \dots (4) \end{aligned}$$

画像に (4) 式を適用する場合、画像の周囲に境界条件を設定しなければならない。解が一意的に求まるようにするため、境界条件は、画像の周囲にゼロ要素を追加し、画素値 $U = 0$ の固定ディリクレ型境界条件とする。

〈2・4〉 画像のポアソン方程式 図 1 に対し、(4) 式を適用すると、図 3(a) のようにスカラー値の分布が得られる。画像処理において、画像データに対するラプラシアンは、画像内に存在するターゲットのエッジを抽出する手法として最も広汎に用いられている⁽⁹⁾。一方、静電界問題において、ラプラシアンはフィールド源であるソースデンシティー、すなわち、電荷密度を求める演算である。このことから、静的画像の支配方程式はポアソン方程式となる。

$$-\nabla^2 U = \sigma \dots \dots \dots (5)$$

ここで、 σ は、画像のソースデンシティーである。

図 3(a) がソースデンシティーの分布を示しているので、(5) 式の支配方程式を解くことで図 1 の原画像を再現することができる。(5) 式を解く数値解法としてさまざまな方法が提案されているが、本論文では、画素の位置を節点として有限差分法 (4) 式を用いた。すなわち、 i 行 j 列目のソースデンシティーを $\sigma_{i,j}$ とし、(6) 式からなる連立方程式を解くことで画像を再現する。

$$\begin{aligned} U_{i,j} &= \frac{1}{20} [U_{i-1,j-1} + 4U_{i-1,j} + U_{i-1,j+1} \\ &\quad + 4U_{i,j-1} + 4U_{i,j+1} + U_{i+1,j-1} \\ &\quad + 4U_{i+1,j} + U_{i+1,j+1} + 6\sigma_{i,j}] \dots \dots \dots (6) \end{aligned}$$

なお、境界条件はラプラシアンと同様に、画像の周囲にゼロ要素を追加し、画素値 $U = 0$ の固定ディリクレ型境界条件とする。

図 3(b) は、図 3(a) に示したソースデンシティーから (6) 式の有限差分法によって復元された画像である。図 1 の原画像と図 3(b) の再現画像間の相関係数は完全に 1 となり、(5) 式が正しいことが証明された。また、画像においても 2 階微分データを 2 回積分することで原画像が再現できることが判明した。

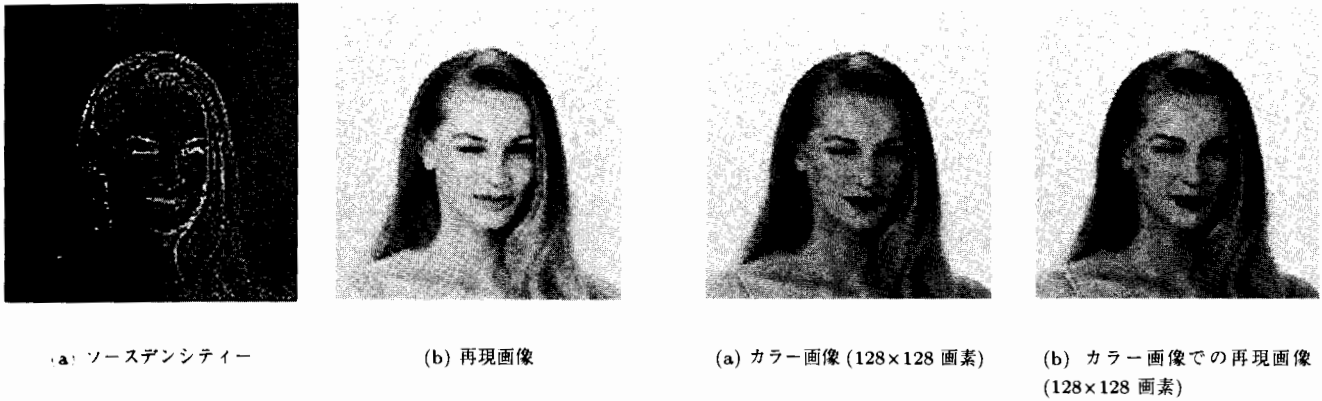


図3 画像データの微分と積分

Fig. 3. Differentiation and integration of an image data. (a) source density distribution, (b) recovered image.

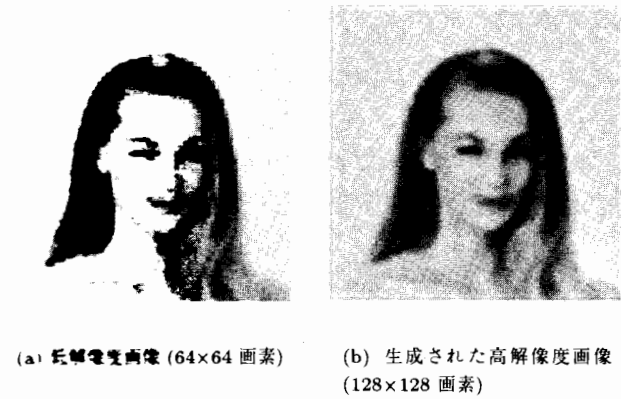


図4 微分方程式による高解像度画像の生成

Fig. 4. High-resolution image generation by means of differential equation.

〈2・5〉 画像の拡大 画像は、(5)式すなわち、ポアソン方程式を満足する。これは、画像データが低解像度であっても画像の支配方程式を解くことで高解像度画像を生成することが可能であることを意味する。厳密に言えば、ポテンシャル分布が低解像度で与えられても、そのラプラシアンで得られたソースデンシティーに対し細かいメッシュシステムを用いて支配方程式を解くことで高解像度のポテンシャル分布を得ることが可能である。例として、図1の画像を一定間隔で間引きして作成した64×64画素の低解像度画像(図4(a))に対してラプラシアンを施した後、画像の周囲にゼロ要素を追加した全節点数130×130点のメッシュシステムを用いて支配方程式を解くことで縦・横128×128の解像度をもつ画像を生成する。結果として図4(b)に示す生成画像と図1との相関係数は、0.95となり、25%のデータ量から0.9を超える相関をもつ画像が得られる。

〈2・6〉 カラー画像 一般に図5(a)に示すようなカラー画像は、光の3原色である赤、緑、青(以下それぞれ

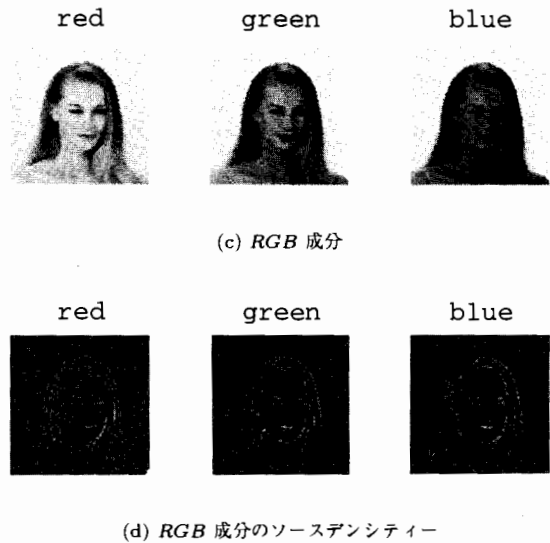


図5 カラー画像, そのRGBおよびソースデンシティー成分

Fig. 5. Color image, its RGB and source density components.

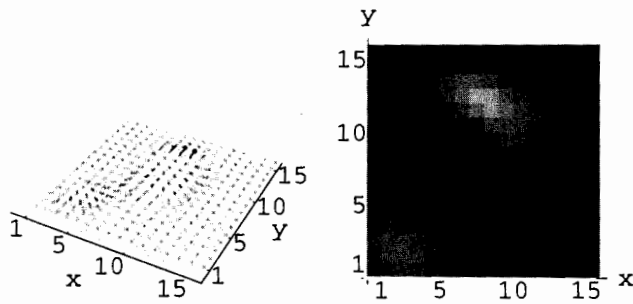
R, G, Bと略記)の成分に分解することができる。すなわち、図5(c)のようにカラー画像は、3個のモノクロ画像から構成されている。よって、静的なカラー画像の支配方程式は、3個の独立したポアソン方程式となる。

$$-\nabla^2 U_{color} = \sigma_{color}, \quad color = R, G, B \dots (7)$$

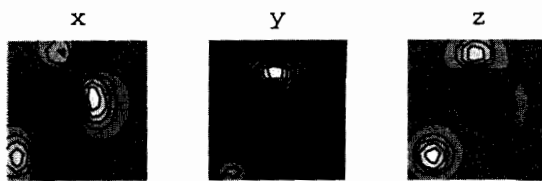
カラー画像のRGB各成分に対して独立に(4)式を適用すると、図5(d)に示すようにRGB各成分のソースデンシティーが得られる。これらのソースデンシティーを用いて、画像の支配方程式を解き、RGB合成することで図5(b)に示す再現画像が得られる。図5(a)と(b)との相関係数は1となり、モノクロ画像の場合と同様に(7)式が成り立つことが判明した。

3. 電磁界分布解析への応用

〈3・1〉 ベクトルデータの画像化 2章で述べた画像処理手法を電磁界分布解析に応用するために、本論文ではカラー画像が光の3原色であるRGBの3成分に分解されることに注目して、ベクトルフィールドのx, y, z直交成



(a) ベクトルフィールド (b) RGB カラーによる可視化画像 (16×16 画素)



(c) ベクトルフィールドの x, y, z 成分

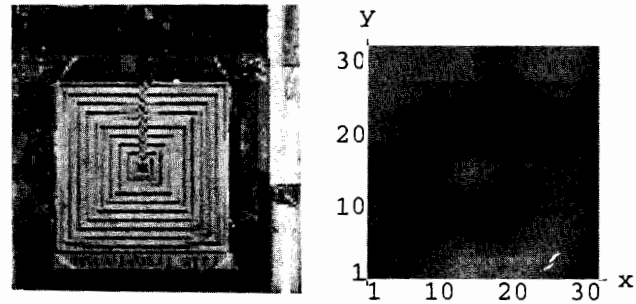
図 6 ベクトルフィールドの可視化
Fig. 6. Visualization of vector field.

分をそれぞれカラー画像の R, G, B に対応させてカラー画像として可視化する。図 6 は、モデルのベクトルフィールドとその x, y, z 方向各成分の分布およびカラー画像によって可視化した結果である。

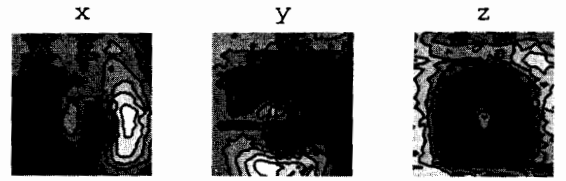
〈3・2〉 DC/DC コンバータ 検証実験として、図 7(a) に示すフィルムトランスを用いた DC/DC コンバータが 38kHz でスイッチング動作時の DC/DC コンバータ直上の磁界を x, y, z 各方向についてソレノイド型サーチコイルで測定した⁽⁴⁾⁻⁽⁶⁾。カラー画像化した磁界分布と磁界分布の各成分をそれぞれ図 7(b), (c) に示す。測定間隔は、 x 方向、 y 方向それぞれ 5mm、測定点数は、 32×32 点である。よって、図 7(b) は、 32×32 画素の解像度をもつ。

〈3・3〉 高解像度磁界分布推定 画像が低解像度であっても、画像の支配方程式を用いることで微分方程式の解として高解像度画像を生成することができる。換言すれば、測定点の粗い磁界分布データが与えられても、画像処理の方法でより詳細な磁界分布を推定できる。具体的な手順は以下の通りである。

1. 〈3・1〉節で述べた手法で測定磁界分布をカラー画像に変換する。
2. カラー画像の RGB 各成分に対し独立に (4) 式のラプラシアンを実行し、 RGB 各成分毎のソースデンシティーを求める。
3. 求めた RGB 各成分のソースデンシティーに対して細かいメッシュシステムで (7) 式の支配方程式を解く。



(a) フィルム状トランスを用いた DC/DC コンバータ (b) 磁界分布のカラー画像表現 (32×32 画素)



(c) 磁界の x, y, z 各成分

図 7 DC/DC コンバータ直上の磁界分布

Fig. 7. Magnetic field vector distribution over a DC / DC converter.

4. 解として得られた RGB 成分を合成し、カラー画像を作成する。

測定した 32×32 画素の磁界分布データを一定間隔で間引きすることで低解像度測定データを生成する。(4) 式より求めた低解像度測定データのソースデンシティーを入力とし、画像の周囲にゼロ要素を追加した全節点数 34×34 のメッシュシステムで画像の支配方程式を解くことで、元の画素数に等しい 32×32 画素の磁界分布を生成する。低解像度測定データの画素数と相関係数との関係を図 8 に示す。なお、図 8 の計算で用いた測定磁界分布である図 9(a) から間引きした $16 \times 16, 8 \times 8, 4 \times 4$ 画素の画像をそれぞれ図 9(b), (d), (f) に示す。さらに、(7) 式を解き、間引きした画像から 32×32 の解像度をもつ画像を生成した結果をそれぞれ図 9(c), (e), (g) に示す。図 9(a) と図 9(c), (e), (g) で得られた画像の相関係数は、間引き画像の画素数が $16 \times 16, 8 \times 8, 4 \times 4$ に対して、それぞれ 0.93, 0.82, 0.50 となった。図 10 は、測定磁界分布と図 9(c), (e), (g) の画像から得られたベクトルフィールドである。結果として、6.25% のデータ量で 0.8 以上の相関をもつ磁界分布を推定することができ、良好な結果を得た。

図 11 には、図 9(a) に対し画素を間引きせずに (4) 式のラプラシアンを適用し、(7) 式の解として高解像度の磁界分布を生成した結果を示す。このような磁界分布の推定は、実験で得られる磁界データからフィールド源である電流を推定し、推定された電流分布から磁界分布を求める。

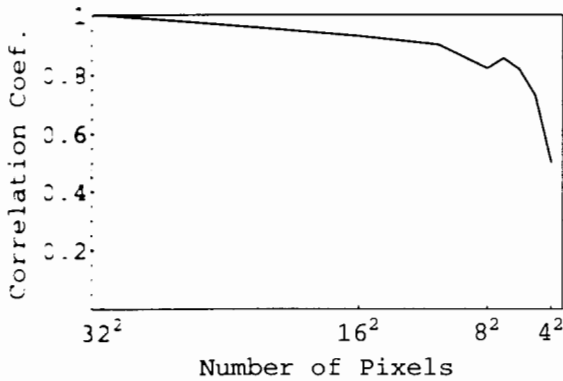


図8 相関係数とデータの解像度との関係

Fig. 8. Relationship between the correlation coefficient and image data resolution.

わゆる逆問題的手段が必要となるが、画像の支配方程式を解く順問題的手段で磁界分布推定が可能であることが判明した。

4. まとめ

本論文では、古典物理学の集大成である場の理論に基づく画像処理方法を提案し、電磁界分布の可視化画像に応用した。電磁界の可視化には、ベクトルフィールドの x, y, z 直交成分をカラー画像の構成要素である画素の RGB の各成分に対応させることによって実現した。本画像処理手法に基づき、画像の支配方程式を解くことで低解像度で与えられた磁界分布から高解像度磁界分布を生成した。DC/DC コンバータを用いた検証実験では、測定点の粗い磁界分布データから、より詳細な磁界分布を推定した。通常逆問題的手段で処理しなければならない問題を、画像処理的手段で 6.25% のデータから 0.8 以上相関をもつベクトルデータの生成が可能であることを確認した。

謝 辞

本研究において測定機器を貸与していただき、さらに、それらの使用方法などご指導をいただいた(株)東芝 原子力技術研究所の兼本茂氏、久保克巳氏、佐久間正剛氏に紙面を借りてここに厚く御礼申し上げます。
(平成 11 年 12 月 20 日受付, 同 12 年 07 月 03 日再受付)

文 献

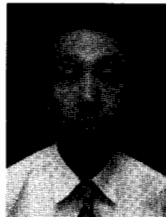
- (1) 田中: "電磁現象の可視化," 電学誌, Vol.119, 3, pp.169-172 (1999).
- (2) 遠藤, 早野, 斎藤, 國井, 佐久間, 堀井: "電磁界分布解析への画像処理的方法," 電気学会マグネティクス研究会資料, MAG-99-141 (1999).
- (3) 遠藤, 早野, 斎藤, 國井: "ウェーブレット変換法と微積分方程式法によるカラー画像の圧縮および再現性について," 可視化情報学会誌, Vol.19, Suppl.No.1, pp.79-82 (1999).
- (4) S.Hayano, H.Saotome, Y.Nakajima and Y.Saito: "A new type high frequency transformer," IEEE Trans. on Magnetics, Vol.MAG-27, No.6, pp.5205-5207 (1991).
- (5) T.Ogawa, H.Saotome, S.Hayano and Y.Saito: "Realization of

- a coreless transformer and its application to a DC/DC converter," Elektrotechn.CAS, 44, No.7, pp.238-241 (1993).
- (6) S.Hayano, Y.Midorikawa and Y.Saito: "Development of film transformer," IEEE Trans. on Magnetics, Vol.MAG-30, No.6, pp.4758-4760 (1994).
- (7) 岩崎, 加藤, 繁多, 斎藤, 堀井: "スケッチ画像から面情報の抽出," 可視化情報学会誌, Vol.19, Suppl.No.1, pp.209-210 (1999).
- (8) 赤坂 隆: "数値計算," コロナ社, (1968).
- (9) T.Mori and T.Sakakura: "Fundamentals of Image Recognition [II] - Feature Extraction, Edge Detection and Texture Analysis," Ohm, (1990).
- (10) 増田, 緑川, 斎藤, 遠矢: "電子回路基板中の電流分布推定に関する研究," 電学論A, Vol.119-A, No.7, pp.997-1004 (1999).
- (11) H.Saotome, K.Kitsuta, S.Hayano and Y.Saito: "Electromagnetic field source searching from the local field measurement," International Journal of Applied Electromagnetics in Materials, Vol.3, pp. 297-306 (1993).

遠藤 久 (学生員) 1976年7月7日生。1999年3月法政大学工学部電気電子工学科卒業。現在、同大学大学院工学研究科修士課程在学中。主として、電磁界解析および電磁界可視化技術に関する研究に従事。IEEE, 電子情報通信学会, 応用磁気学会, 日本 AEM 学会会員。



早野 誠治 (正員) 1947年7月6日生。1977年3月法政大学大学院工学研究科修士課程修了。同年同大学助手, 1993年同専任講師, 1996年同助教授, 現在に至る。主として、計算電磁力学, 磁気工学に関する研究に従事。工学博士。IEEE, 応用磁気学会, 日本生体磁気学会, 日本 AEM 学会会員。

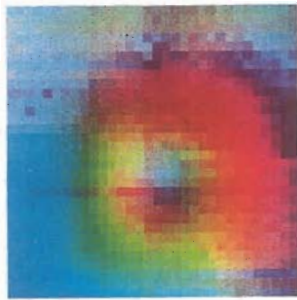


斎藤 兆古 (正員) 1946年7月24日生。1975年3月法政大学大学院工学研究科博士課程修了。同年同大学助手, 1976年同講師, 1978年同助教授, 1987年同教授, 現在に至る。主として、計算電磁力学に関する研究に従事。工学博士。日本 AEM 学会著作賞受賞 (Mathematica によるウェーブレット変換, 朝倉書店)。International Journal of Applied Electromagnetics in Materials, Editorial Board. IEEE, 電子情報通信学会, 応用磁気学会, 日本生体磁気学会, 日本 AEM 学会, Electromagnetics Academy (MIT) 会員。

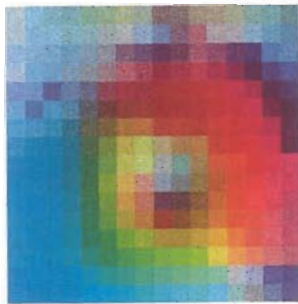


國井 利泰 (非会員) 1938年1月1日生。1967年3月東京大学大学院博士課程修了。同年同大学助手, 1969年同助教授, 1973同教授, 1993年会津大学学長。1994年カリフォルニア大学バークレイ校客員教授。1998年4月法政大学教授, 現在に至る。理学博士。査読付き学術論文 500 編余, 編著書 50 冊余。IEEE Computer Society の 1998 年度 Taylor L. Booth 賞受賞。電子情報通信学会, ACM 会員。情報処理学会, IEEE Fellow。





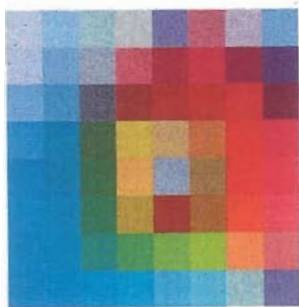
(a) 測定磁界分布 (32×32 画素)



(b) 16×16



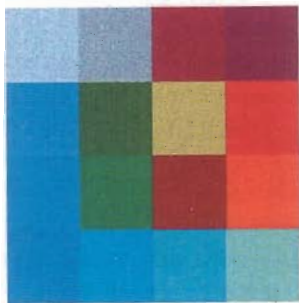
(c) 16×16 から 32×32



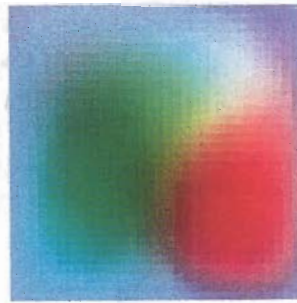
(d) 8×8



(e) 8×8 から 32×32

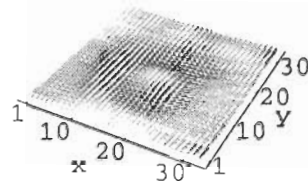


(f) 4×4

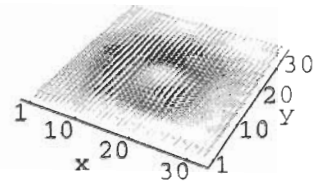


(g) 4×4 から 32×32

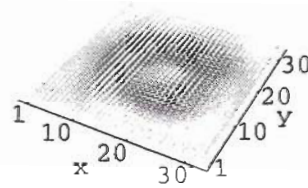
図9 低解像度磁界分布 (左列) から
高解像度磁界分布 (右列) の推定
Fig.9. Generation of high-resolution magnetic
field distributions (right column) from low-resolution
ones (left column).



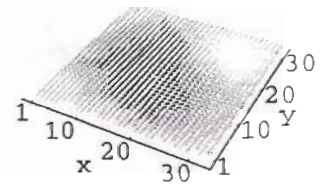
(a) 測定磁界分布 32×32



(b) 16×16 から 32×32

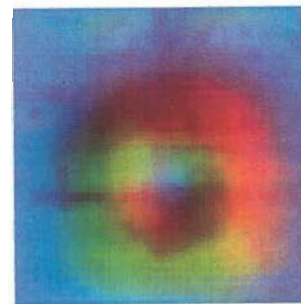


(c) 8×8 から 32×32

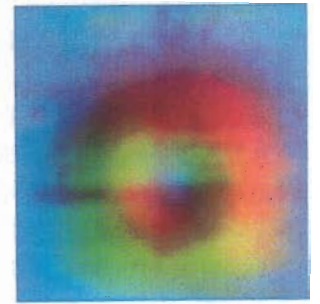


(d) 4×4 から 32×32

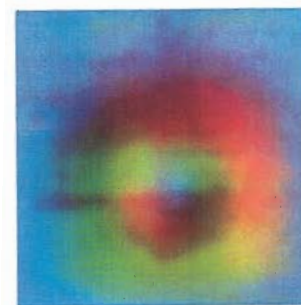
図10 再現されたベクトルフィールド
Fig.10. Recovered vector fields.



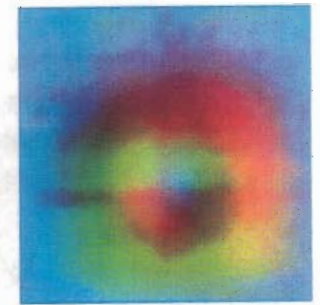
(a) 32×32 から 64×64



(b) 32×32 から 128×128



(c) 32×32 から 192×192



(d) 32×32 から 256×256

図11 磁界ベクトル分布の実測値 (図9(a)) から
高解像度磁界分布の生成
Fig.11. Generation of the higher resolution mag-
netic field distributions from a measured magnetic
field vector distribution in Fig.9(a).