

静磁界系逆問題における Sampled Pattern Matching 解法とその高速化

Faster Sampled Pattern Matching Method for Magnetostatic Inverse Problems

早乙女英夫, 早野誠治, 斎藤兆古
H. Saotme S. Hayano & Y. Saito

1. まえがき

逆問題は、同定問題、最適化問題、計算機による自動設計、非破壊検査および医療診断などと深い関わり合いを持ち、逆問題解析技術の確立が近未来に要求される技術、ビジネスおよびマーケットの開発に大きく貢献するものと期待されている。例えば、電気機器の設計をする場合、従来は過去の設計・実績データあるいは有限要素法・境界要素法などの順問題解析によって得られたデータを反復的に使用し、目標とする仕様を満足する設計値を得ようとする手法が多くなされてきたが、これを逆問題的アプローチによって直接的に行うことも考えられる。一方、逆問題は局所的もしくは部分的に与えられた情報(電磁界フィールド、機器の設計仕様など)からそれをもたらす源(電磁界源、設計値など)を探る問題であり、順問題と異なり、多くの場合一意的な解を得ることは期待できない。これは、同じ部分的情報を与える可能性のある原因は無数に存在するためである。従って逆問題の解法としては、これら無数の可能性の中からある拘束条件を満足する解のみを抽出する手法か、もしくはただ一つの解を求めることにはこだわらず、解として可能性のあるものすべてについて吟味し、それらに何らかの重み付けをしていく方法が考えられる。

著者らは、逆問題解析手段として、後者の方法に当たる Sampled Pattern Matching 法(以後、SPM法と略記)を提唱し、本手法の有効性を吟味すると共に、これを眼磁図(Magneto-oculogram, MOG)、心磁図(Magnetocardiogram, MCG)および脳磁図(Magnetoencephalogram, MEG)解析などの生体磁気応用¹⁻⁶⁾、さらに産業応用として金属材料の非破壊検査(Nondestructive Testing, NDT)⁷⁾へ適用し、その有用性を示した。

本稿では、まず最初に、静磁界系逆問題の支配方程式である磁界分布関数と測定磁界分布との重畳積分により空間電流分布パターンが求められ、実はこのアルゴリズムを空間離散値系で行う方法がSPM法であること示す。次に、支配方程式に拘束条件を課す手法として代表的な最小ノルム法⁸⁾とSPM法との比較数値実験を行い、その結果として得られたそれぞれの解の特徴について述べる。磁界源となる電流双極子は空間ベクトルであり、同じ点にある電流双極子であってもその向きによって異なる磁界空間分布を与える。従って電流双極子の同定のためにはこのベクトルの角度方向の離散化が必要となる。よって最後に、この離散化に伴う未知数の増加およびその結果として生ずる計算時間の増大を避けるために開発した高速SPM法⁶⁾について触れ、本手法の実験的検証を行う。

2. 磁界重畳積分による磁界源推定

均一媒質の開領域問題では、電流密度 J によって生ずる磁界 H は、両者間の距離を s として、

$$H = \nabla \times \int_V \frac{J}{4\pi s} dv \dots\dots\dots (1)$$

ここで、 V : 電流存在領域の体積

なる体積積分によって与えられ、これが静磁界系逆問題の支配方程式となる³⁾。ここで、電流密度 J と微小体積 dv との積 $J dv$ は、電流とその経路との積、すなわち磁界源となる電流双極子ベクトルであり、これを未知変数と考えることができる。また、磁界源を求める逆問題では、磁界の測定は磁界源の存在しない領域でしかも局所的に行われるので、 H と J が同一点にある場合の $\nabla \times H = J$ の関係式は直接適用できない。

図1に示す如くある立体体積中に電流が存在し、これによる磁界がこの立体を囲む面の一部(上部面)で測定されるものとする。また、磁界測定は測定面(X, Y)に対して垂直な z 成分 H_z のみについて行われるものとする。この場合には、(1)式 of 回転演算により電流密度の z 方向成分は H_z に影響を与えず、求める電流双極子は図1の $x-y$ 平面に平行な成分のみとなる。そこで、この電流双極子ベクトルは $x-y-z$ 座標上の位置と $x-y$ 平面上の角度 ϕ によって表わされる。

測定磁界を $H_{mz} = H_{mz}(X, Y)$ とし、座標 (x, y, z) に角度 ϕ の方向を持った電流双極子ベクトル $J(x, y, z) dv$ が測定面に与える磁界を $H_z = H_z(X, Y, x, y, z, \phi)$ とする。ただし、 $H_z(X, Y, x, y, z, \phi)$ は(1)式によって計算される。次にこれらの磁界パターンが一致したときに大きさが1となる評価関数

$$\gamma_1(x, y, z, \phi) = \frac{1}{\|H_{mz}\| \|H_z\|} \times \iint H_{mz} H_z dXdY \dots\dots\dots (2)$$

を考える。ここで、 $\|\cdot\|$ はノルムを表わし、

$$\|H_{mz}\| = (\iint H_{mz}^2 dXdY)^{1/2} \dots\dots\dots (3a)$$

$$\|H_z\| = (\iint H_z^2 dXdY)^{1/2} \dots\dots\dots (3b)$$

である。(2)式は測定磁界パターンと評価磁界パターンとの測定面に渡る重畳積分であり、 H_z の H_{mz} に対する応答、すなわち推定磁界源のスペクトルを示す³⁾。言い替えれば、

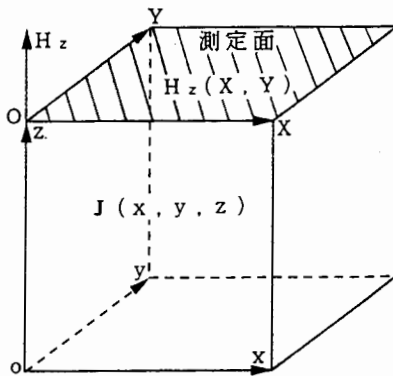


図1 解析モデル

この演算は測定磁界 H_{mz} を基底関数 H_z に分解して考え、その重みを求めていることに帰着する。ただし、この基底関数間での直交性は、一般に保証されないことがわかっている³⁾。次に(2)式で最大値をとる H_z を H_{z1} として、これに重みを置いた

$$\gamma_2(x, y, z, \phi) = \frac{1}{\|H_{mz}\| \|H_{z1} + H_z\|} \times \iint H_{mz} (H_{z1} + H_z) dXdY \dots \dots \dots (4)$$

を求め、同様の演算を $\gamma_{i-1} < \gamma_i$ の条件が成立する限り行う。その結果最終的に h 回の演算を行ったとすると、各回で最大値を取った磁界パターンに重み付けをして得られた磁界源スペクトル

$$\gamma(x, y, z, \phi) = \frac{1}{h} \sum_{i=1}^h \gamma_i(x, y, z, \phi) \dots \dots \dots (5)$$

を得る。以上のアルゴリズムを空間離散値系で行う方法がSPM法である¹⁻⁷⁾。

3. SPM法と最小ノルム法の比較

3.1. 支配方程式の離散化

(1)式の積分領域 V を m 個の微小体積 ΔV に分割し、 ΔV 中での電流密度を一定として、静磁界系逆問題のシステム方程式を得ることを考える。測定点 i における磁界の z 方向成分は、求めようとする電流双極子ベクトルの $x-y$ 平面上の角度分解能を $360/m'$ 度とすると、

$$H_{zi} = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^{m'} \frac{J_{jk} \times a_{ij} \Delta V}{4\pi s_{ij}^2} \cdot e_z \dots \dots \dots (6)$$

ここで、 s_{ij} : 測定点 i と j 番目の微小体積との距離、 a_{ij} : s_{ij} 方向の単位ベクトル、 J_{jk} : j 番目の微小体積における角度 $(360/m')$ k 度方向の電流密度ベクトル、 e_z : z 方向単位ベクトル

の如くなる³⁾。一方、磁界測定点が n 個あるとすると、測定磁界パターンベクトル

$$u = [H_{mz1} \ H_{mz2} \ \dots \ H_{mzn}]^T \dots \dots \dots (7)$$

を得る。電流双極子ベクトル $J_{jk} \Delta V$ の大きさを

$$\alpha_{jk} = |J_{jk} \Delta V| \dots \dots \dots (8)$$

とし、

$$d_{jk} = \{1/(4\pi)\} [(b_{jk} \times a_{1j}) \cdot e_z / s_{1j}^2 \ (b_{jk} \times a_{2j}) \cdot e_z / s_{2j}^2 \ \dots \ (b_{jk} \times a_{nj}) \cdot e_z / s_{nj}^2]^T \dots \dots \dots (9)$$

ここで、 b_{jk} : J_{jk} 方向の単位ベクトル

なる n 次列ベクトルを定義すると、(6)式は、

$$u = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^{m'} \alpha_{jk} d_{jk} \dots \dots \dots (10)$$

と書ける。 d_{jk} は空間の離散化によって決まるので、(10)式は、 α_{jk} ($j = 1 \sim m, k = 1 \sim m'$) を未知数とする連立方程式である。そこで、 α_{jk} を要素とする $m \times m'$ 次の列ベクトル

$$f = [\alpha_{11} \ \alpha_{12} \ \dots \ \alpha_{1m'} \ \alpha_{21} \ \alpha_{22} \ \dots \ \alpha_{2m'} \ \dots \ \alpha_{m1} \ \alpha_{m2} \ \dots \ \alpha_{mm'}]^T \dots \dots \dots (11)$$

および d_{jk} ($j=1 \sim m, k=1 \sim m'$) を要素とする n 行 $m \times m'$ 列のシステム行列

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1m'} & d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2m'} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ d_{m1} & d_{m2} & \cdots & d_{mm'} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix} \cdots \cdots \cdots (12)$$

を用いると、(10)式は

$$u = D f \cdots \cdots \cdots (13)$$

となり、静磁界系逆問題のシステム方程式を得る。ここで、未知数の数 $m \times m'$ は一般に式の数 n に対して圧倒的に多く、

$$n < m \times m' \cdots \cdots \cdots (14)$$

の関係がある。

3.2. SPM法

(9)式の d_{jk} は j 番目の微小体積にある角度 $\phi_k = (360/m')$ k 度を持った単位電流双極子ベクトルが測定面に与える磁界パターンを示しており、(2)式および(4)式の演算は、それぞれ離散値系では

$$\gamma_{1jk} = u^T \cdot d_{jk} / (\|u\| \cdot \|d_{jk}\|), \quad (j=1 \sim m, k=1 \sim m') \cdots \cdots (15)$$

および

$$\gamma_{2jk} = u^T \cdot (d_{j'k'} + d_{jk}) / (\|u\| \cdot \|d_{j'k'} + d_{jk}\|), \quad (j=1 \sim m, k=1 \sim m') \cdots \cdots (16)$$

ただし、 $\gamma_{1j'k'}$: (15)式の最大値

となる。また、離散値系のノルム $\|\cdot\|$ はベクトルの各要素の RMS (Root Mean Square) 値をとったものであり、(3)式に対応している。実際の SPM法では、 $\gamma_{1jk}, \gamma_{2jk}, \cdots$ で最大値をとったものを 1 とし続ける非線形重み付け演算を加えており^{4), 5), 7)}、最終的に(5)式に対応する解パターン

$$\gamma_{jk} = \frac{1}{h} \sum_{i=1}^h \gamma_{ijk} \cdots \cdots \cdots (17)$$

を得る。

3.3. 最小ノルム法

(13)式のような式の数と未知数の数が不一致の連立方程式を解くには幾つかの方法が知られている⁹⁻¹⁰⁾。例えば、ベクトル u と $\alpha_{jk} d_{jk}$ の距離が最小になる j および k を求めようとする最小 2 乗法があるが、これは最も支配的な単一の電流双極子を求めるもので、複数個の電流双極子から成る解を得ることはできない。一方、SPM法はベクトル u と d_{jk} の角度に評価基準を置いた方法であり、複数個の電流双極子が求められる方法の一つである。また、この他に複数個の電流双極子を与える方法として最小ノルム法がある⁸⁾。これは、無数にある D の右逆行列⁹⁾の中で、解ベクトル f のノルムが最小となるものを探し出す方法であり、この時の f は次式によって与えられる。

$$f = D^T (D D^T)^{-1} u \cdots \cdots \cdots (18)$$

3.4. 数値実験

SPM法および最小ノルム法はそれぞれ(17)式および(18)式によって解を与える。ここでは 2 つの例題について、SPM法と最小ノルム法との比較数値実験を行う。また数

値実験結果として、空間上の同じ点にある解についてこれらの角度合成処理をした後の電流双極子ベクトルを示す。

最初の例題は、図1の立体中に図2のようなループ電流が流れているケースで、磁界測定は図1に示したようにこの立体の上部面のみで行われ、しかも磁界のz方向成分のみが測定されるものとする。この数値実験で用いる測定磁界パターンは順問題として容易に計算でき、測定点は格子状に $6 \times 6 = 36$ 点あるものとする。一方、この立体の離散化はx, yおよびz方向に $13 \times 13 \times 15$ 分割し、さらに求める電流双極子ベクトルのx-y平面上の角度分解能は5度とする。以上の条件より、 $n = 36, m \times m' = 182520$ となる。図3および図4はSPM法および最小ノルム法による解析結果である。ただし、図3は(17)式の解パターンの内、 $\gamma \geq 0.9$ の部分を図示した。これらの上面図からはどちらもループ状の解分布がみられるが、正面図を見ると最小ノルム法による解は測定面から浅い部分に分布し、SPM法による解の方が図2(b)に示した正解の電流の深さに近いことがわかる。また、図4(a)の最小ノルム法の結果では、y座標が最大となる2つの隅において

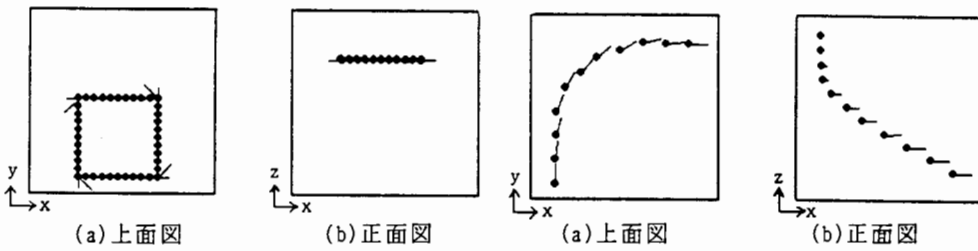


図2 正解の電流分布(ループ電流)

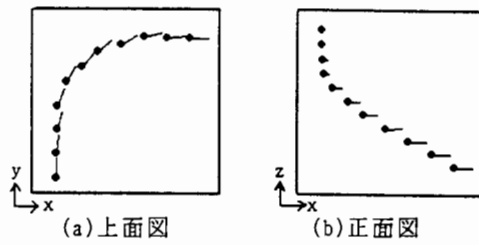


図5 正解の電流分布(らせん状電流)

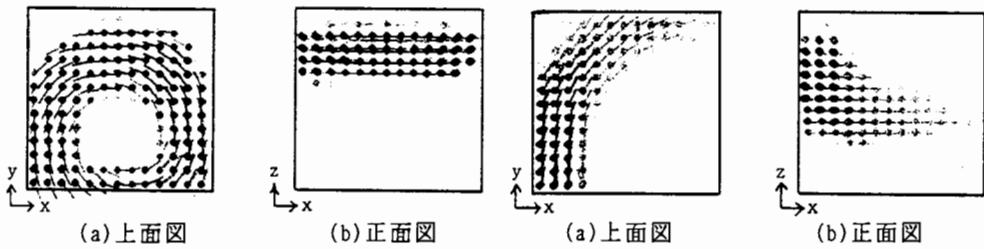


図3 SPM法による解パターン(ループ電流)

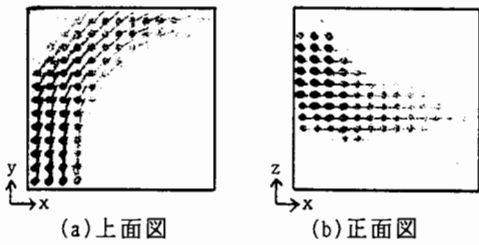


図6 SPM法による解パターン(らせん状電流)

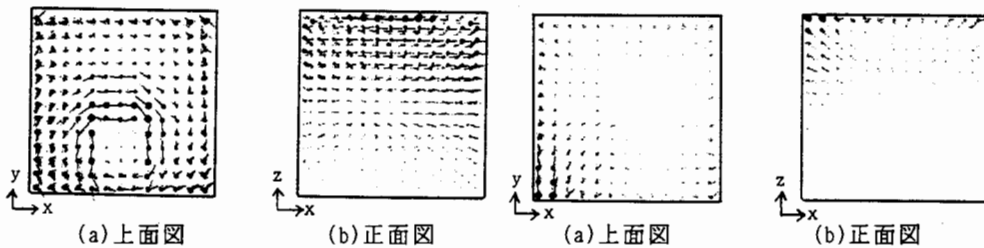


図4 最小ノルム法による解パターン(ループ電流)

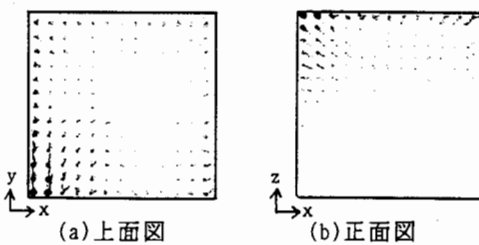


図7 最小ノルム法による解パターン(らせん状電流)

て正解の電流方向とは逆向きの解が現れている。

次に解の深さ方向の吟味をするため、図5に示すらせん状電流について、最初の例題と同様の離散化条件の下、2つの方法による解の比較を行う。図6および図7はこの場合のSPM法および最小ノルム法による解析結果であり、図6は図3と同様、(17)式の解パターンの内、 $\gamma \geq 0.9$ の部分を図示した。図6および図7より、SPM法はらせん状の解パターンを与えるが最小ノルム法は正解の電流分布とは全く異なる解を出すことがわかる。

最小ノルム法は、その特徴として同じ磁界パターンを与えるものの中から電流双極子ベクトルの大きさが全体として最小で済む解ベクトルを求める方法である。従って、小さな電流双極子ベクトルであっても大きな磁界パターンを与えるために、測定面に近い部分に電流双極子ベクトルが集中することがわかる。一方、SPM法は深さ方向に対して若干の減衰はあるものの、概ね正解に近い解パターンを与える。

4. 高速SPM法の実験的検証

4.1. 定式化

高速SPM法は電流双極子ベクトルの角度 ϕ 方向の離散化による演算時間の削減を目的とする手法で、電流双極子ベクトルの直交する2成分がそれぞれ測定面に垂直に与える磁界パターンを考え、これら磁界パターン間の直交性が成立する座標系、すなわち円筒および球座標系(図8および図9)の導入によって定式化したものである⁶⁾。

図8の円筒座標系において、z方向磁界 H_z は、電流双極子ベクトル α のr方向成分 α_r および θ 方向成分 α_θ によって生じる磁界成分 H_{zr} および $H_{z\theta}$ に分解して考えることができる。

$$H_z = H_{zr} + H_{z\theta} \dots \dots \dots (19)$$

円筒座標系における単位ベクトル e_z 、 α の位置での単位ベクトル e_r および e_θ 、さらに α から H_z への距離ベクトル s を用いると、これらは

$$H_{zr} = \frac{(\alpha_r e_r) \times s}{4 \pi |s|^3} \cdot e_z \dots \dots \dots (20a)$$

$$H_{z\theta} = \frac{(\alpha_\theta e_\theta) \times s}{4 \pi |s|^3} \cdot e_z \dots \dots \dots (20b)$$

と書け、円形測定面Pに渡る面積分に対し、

$$\int_P H_{zr} H_{z\theta} dS = 0 \dots \dots \dots (21)$$

が成立する。この直交性は、 H_{zr} および $H_{z\theta}$ の磁界パターンが、図8のr軸に沿ってそれぞれ奇関数および偶関数となるため、これは図1のx-y-z座標系では一般に成立しない。

同様の直交性が図9の球座標系においても成立する。球状測定面の法線方向磁界 H_r は、電流双極子ベクトル α の θ 方向成分 α_θ および ϕ 方向成分 α_ϕ によるそれぞれの磁界 $H_{r\theta}$ および $H_{r\phi}$ に分解できる。

$$H_r = H_{r\theta} + H_{r\phi} \dots \dots \dots (22)$$

この場合も球面上の円形境界測定面Pについて、

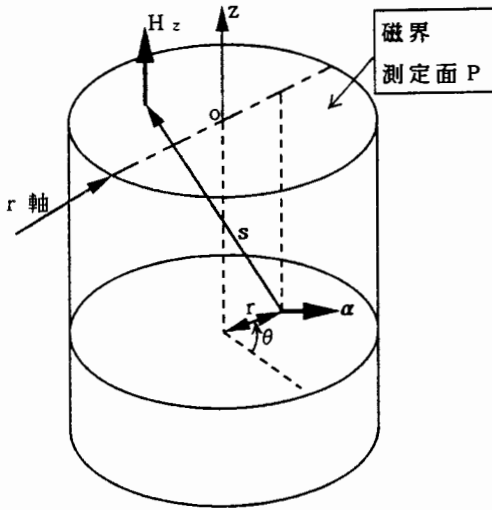


図8 円筒座標系

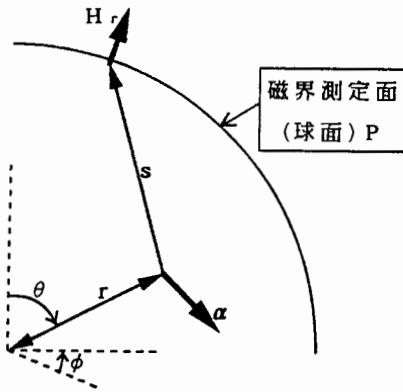


図9 球座標系

$$\int_p H_{r\theta} H_{r\phi} dS = 0 \dots\dots\dots (23)$$

が成立する。ここで、 $H_{r\theta}$ および $H_{r\phi}$ は、球座標系における H_r の位置での単位ベクトル e_r 、 α の位置での単位ベクトル e_θ および e_ϕ 、さらに α から H_r への距離ベクトルを s として、次式の如くなる。

$$H_{r\theta} = \frac{(\alpha_\theta e_\theta) \times s}{4\pi |s|^3} \cdot e_r \dots\dots\dots (24a)$$

$$H_{r\phi} = \frac{(\alpha_\phi e_\phi) \times s}{4\pi |s|^3} \cdot e_r \dots\dots\dots (24b)$$

このような円筒および球座標系の特徴を用いて(1)式の積分領域 V を m 個の微小体積に離散化すると、 u を各測定面に垂直な測定磁界パターンベクトルとして、次式を得る。

$$u = \sum_{j=1}^m (\alpha_{\theta j} d_{\theta j} + \alpha_{\phi j} d_{\phi j}) \dots\dots\dots (25)$$

ただし、円筒座標系では $p = r, q = \theta$ であり、球座標系では $p = \theta, q = \phi$ である。また、 $d_{\theta j}$ および $d_{\phi j}$ は(20)式および(24)式から得られる磁界パターンベクトルである。(10)式および(25)式の比較から、この定式化により未知数および演算回数が $2/m'$ 倍となって大幅に減少したことがわかる。

円筒および球座標系でのSPM演算は $d_{\theta j}$ および $d_{\phi j}$ ($j = 1 \sim m$)について独立に u との間で行い、その結果の比をもって j 点における電流双極子ベクトルの角度を得ることができる。

4.2. 実験および解析結果

図10に示す如く、円筒内部にある高さの異なる2つの導体に1MHzの電流を流し、上部円形面でその垂直成分磁界を測定した。ただし、2つの導体の巻数と通電電流値は等しく、測定点数は $n = 37$ である。図10(c)は通電電流が正の最大波高値となったときの測

定磁界の大きさを示すもので、N極およびS極領域はそれぞれ●および○で表わした。この円筒内部を $m = 15687$ 個に離散化してSPM演算を行った結果($\gamma \geq 0.9$)を図11に示す。

図12は球座標系での例を示すもので、座標中心からずれた位置にある、傾きを持った円形コイルに1MHzの電流を流し、図中の球面に垂直な磁界を $\theta \leq 0.8\text{rad}$ の範囲で測定した。測定点数 $n = 61$ で、このときの測定磁界パターンを図12(c)に示す。図13は、図12に示した $\theta \leq 0.9\text{rad}$ の推定空間を $m = 27240$ に離散化し、SPM演算をした結果($\gamma \geq 0.9$)

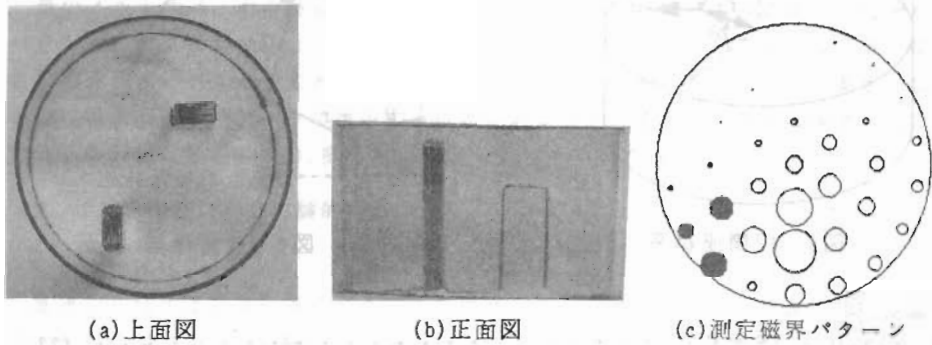


図10 円筒座標系内に置かれた導体

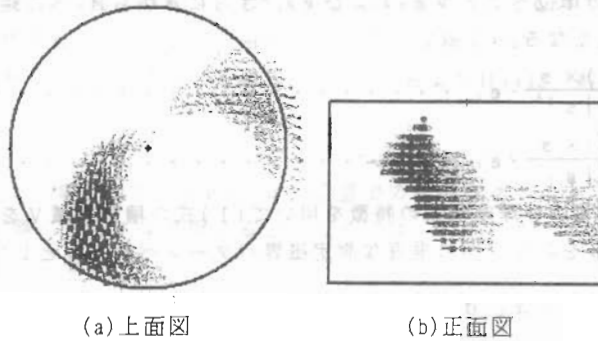


図11 SPM法による導体位置推定結果(円筒座標系)

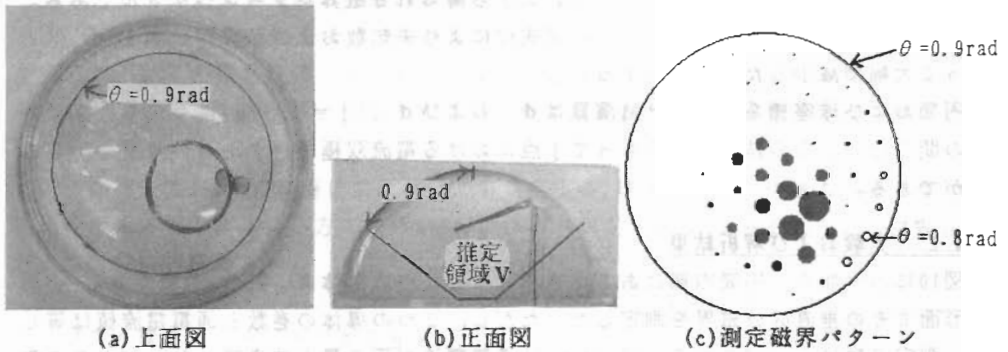


図12 球座標系内に置かれた導体

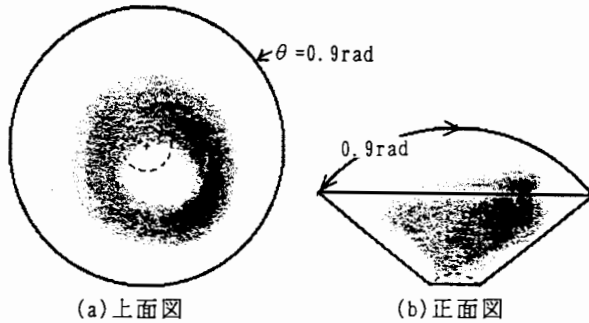


図13 SPM法による導体位置推定結果(球座標系)

である。ただし、推定空間半径は、測定球面半径の20%以上とした。

図11および図13より、高速SPM法はある程度の曖昧さはあるものの、ほぼ導体の位置・形状を推定できることがわかる。また図6の数値実験結果と同様、深さ方向に分布する磁界源の推定では、深い部分の解スペクトルの大きさが浅い部分のそれより数%小さく現れている。

5. むすび

静磁界系逆問題において、測定磁界分布と評価磁界分布との測定面に渡る重畳積分が磁界源の空間分布スペクトルを与え、これを離散値系で行う手法がSPM法であることを示した。

SPM法は通常の最小2乗法と異なり、複数個の磁界源推定が行える方法の1つである。よって、従来より複数個の磁界源推定ができる方法として知られている最小ノルム法とSPM法との比較数値実験を行い、その結果からSPM法は測定面から奥行き方向に磁界源が分布する場合に優位性を示すことがわかった。

最後に、測定面磁界パターンの直交性を利用した高速SPM法について述べ、この実験的検証を行い、本方法の有用性を明かにした。

参考文献

- 1) Y. Saito, et al.: A formulation of the inverse problems in magnetostatic fields and its application to a source position searching of the human eye fields, *J. Appl. Phys.*, **67**, No. 9, 5830, 1990.
- 2) 早乙女英夫, 他: 「生体磁界における逆問題」, 電学論A, **112**, 279, 平成4年.
- 3) 早乙女英夫, 他: 「Sampled Pattern Matching法による生体内電流分布推定」, 電学論C, **113**, 69, 平成5年.
- 4) H. Saotome, et al.: A neural behavior estimation by the generalized correlative analysis, *IEEE Trans. Magn.*, **MAG-29**, No. 2, 1389, 1993.
- 5) H. Saotome, et al.: Electromagnetic field source searching from the local field measurement, *Int. J. Appl. Electromag. Matrix*, **3**, No. 4, 297, Elsevier, 1993.

- 6) 早乙女英夫, 他: 「局所直交座標系によるMCG, MEG解析 - SQUIDセンサの最適配置-」, 電気学会マグネティックス研資, MAG-93-60, 平成5年.
- 7) H. Saotome, et al.: Crack identification in metallic materials, *IEEE Trans. Magn.*, **MAG-29**, No.2, 1861, 1993.
- 8) J. Z. Wang, et al.: Magnetic source image determined by a lead-field analysis: The unique minimum-norm least-squares estimation, *IEEE Trans. Biomed. BME-39*, No.7, 1992.
- 9) G. ストラング(山口昌哉, 井上昭 訳): 線形代数とその応用, 平成元年, 産業図書.
- 10) 日野幹雄 著: スペクトル解析, 平成3年, 朝倉書店.

原稿受付日	平成5年10月7日
-------	-----------