

三次元立方体中の電流分布推定

Estimation of Current Distribution
in a Three-Dimensional Cubic Solid

山田 尚生, 早野 誠治, 斎藤 兆古
H. Yamada, S. Hayano and Y. Saito

法政大学 工学部
College of Engineering, Hosei University

1. はじめに

生体中のみならず材料中の電流分布が外部磁界の測定から推定可能であるとするれば、生体中や材料中の欠損推定が可能となる。このことから、医学的には非侵襲的診断、特に従来のCTによる癌の発見は細胞が癌化した後でなければ困難であるのに対し、電流分布すなわち神経活動の変化が推定できれば、細胞が癌化する以前に癌の早期発見が可能となる。また、金属材料中で金属疲労などに起因する亀裂などは、金属疲労によって電気抵抗等が微小でも変化すれば金属材料中の電流分布に反映するため、亀裂などの欠損に至る以前に探知できる可能性がある。従来のフーリエ変換を用いた解析では、立方体の周辺すべての磁界分布から二次元的な電流分布は厳密に求められるが三次元的に分布する電流は求められないことが証明されている[1]。

本稿では、因子分析法を用いて立方体中の三次元的電流分布が推定可能であるかどうかの検討を行う[2]。

2. 基礎方程式

体積 V を持つ立方体中の電流密度 J と立方体周辺磁界 H の関係は、Biot-Savartの法則より、

$$H = \nabla \times \int_0^V \frac{J}{4\pi|r|} dv, \quad (1)$$

で与えられる。ここで、 r は電流密度 J をとる点と磁界 H 間の距離である。図1より、この立方体が m 個の微小立方体 ΔV_i ($i=1 \sim m$) に分割され、個々の微小立方体中で電流密度 J は一定値 J_i ($i=1 \sim m$) とし、測定面を n 個に分割し、個々の測定磁界ベクトルを H_j ($j=1 \sim n$) とすれば、(1)式は次式のように離散化される。

$$H_j = \sum_{i=1}^m J_i \Delta V_i \cdot \frac{n_i \times a_{j1}}{4\pi r_{j1}^2}, \quad j=1 \sim n \quad (2)$$

ただし、図1より $J_i \Delta V_i$, n_i , r_{j1} および a_{j1} はそれぞれ電流双極子ベクトル、電流双極子ベクトルと同一方向を持つ空間単位ベクトル、電流密度 J_i をとる点と測定面における磁界 H_j 間の距離、距離 r_{j1} の方向の空間単位ベクトルである。

(2)式において、電流双極子ベクトルの x 成分、 y 成分および z 成分がそれぞれ測定面に作る磁界

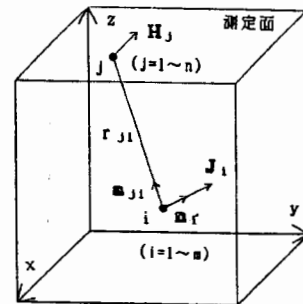


図1 解析モデル

パターン間で直交性が近似的に成立するので、左辺の項である測定磁界 H_j ($j=1\sim n$) を要素とする n 次の列ベクトル U は次式のように分解される。

$$\begin{aligned} U &= U_x + U_y + U_z \\ &= [H_{x1}, H_{x2}, \dots, H_{xn}]^T \\ &\quad + [H_{y1}, H_{y2}, \dots, H_{yn}]^T \\ &\quad + [H_{z1}, H_{z2}, \dots, H_{zn}]^T, \end{aligned} \quad (3a)$$

ここで、 n 次の列ベクトル U_x, U_y, U_z はそれぞれ電流双極子ベクトルの x 成分、 y 成分、 z 成分が測定面に与える測定磁界パターンベクトルである。

また、(2)式の右辺において、電流双極子ベクトル $a_i (= J_i \Delta V_i)$ は次式のように分解される。

$$a_i = a_{ix} \cdot e_x + a_{iy} \cdot e_y + a_{iz} \cdot e_z, \quad (3b)$$

ここで、 e_x, e_y, e_z はそれぞれ x 軸方向、 y 軸方向、 z 軸方向の空間単位ベクトルであり、 a_{ix}, a_{iy} および a_{iz} はそれぞれ電流双極子ベクトルの x 成分、 y 成分、 z 成分の大きさである。

さらに、(2)式の右辺において、

$$d_i = \frac{n_i \times a_{i1}}{4\pi r_{i1}^2}, \quad (3c)$$

を定義すると、(3c)式は次式のように分解される。

$$d_i = d_{ix} + d_{iy} + d_{iz}, \quad (3d)$$

$$\begin{aligned} d_{ix} &= \left(\frac{1}{4\pi} \right) \left[\frac{n_i \times a_{x11}}{r_{x11}^2}, \frac{n_i \times a_{x21}}{r_{x21}^2}, \dots, \right. \\ &\quad \left. \frac{n_i \times a_{xni}}{r_{xni}^2} \right]^T, \end{aligned} \quad (3e)$$

$$\begin{aligned} d_{iy} &= \left(\frac{1}{4\pi} \right) \left[\frac{n_i \times a_{y11}}{r_{y11}^2}, \frac{n_i \times a_{y21}}{r_{y21}^2}, \dots, \right. \\ &\quad \left. \frac{n_i \times a_{yni}}{r_{yni}^2} \right]^T \end{aligned} \quad (3f)$$

$$\begin{aligned} d_{iz} &= \left(\frac{1}{4\pi} \right) \left[\frac{n_i \times a_{z11}}{r_{z11}^2}, \frac{n_i \times a_{z21}}{r_{z21}^2}, \dots, \right. \\ &\quad \left. \frac{n_i \times a_{zni}}{r_{zni}^2} \right]^T, \end{aligned} \quad (3g)$$

ここで、 r_{ji} の x 成分の長さ r_{xji} は、

$$r_{xji} = r_{ji} \cdot a_{ji} \cdot e_x, \quad (3h)$$

で与えられ、 y 成分および z 成分についても同様である。

(2)式に(3a),(3b)および(3d)式を代入すると、

$$U_x + U_y + U_z = \sum_{i=1}^m \alpha_{ix} d_{ix} + \sum_{i=1}^m \alpha_{iy} d_{iy} + \sum_{i=1}^m \alpha_{iz} d_{iz}, \quad (4)$$

となり、それぞれ項別に整理すると、

$$U_x = \sum_{i=1}^m \alpha_{ix} d_{ix}, \quad (5a)$$

$$U_y = \sum_{i=1}^m \alpha_{iy} d_{iy}, \quad (5b)$$

$$U_z = \sum_{i=1}^m \alpha_{iz} d_{iz}, \quad (5c)$$

となる。(5a)~(5c)式にそれぞれ因子分析法を適用する。すなわち、 γ_{xi} , γ_{yi} , γ_{zi} をx, yおよびz方向の電流に対する因子係数として、

$$\gamma_{xi} = \frac{U_x^T \cdot d_{ix}}{\|U_x\| \|d_{ix}\|}, \quad i = 1 \sim m, \quad (6a)$$

$$\gamma_{yi} = \frac{U_y^T \cdot d_{iy}}{\|U_y\| \|d_{iy}\|}, \quad i = 1 \sim m, \quad (6b)$$

$$\gamma_{zi} = \frac{U_z^T \cdot d_{iz}}{\|U_z\| \|d_{iz}\|}, \quad i = 1 \sim m, \quad (6c)$$

を求め、それぞれの因子係数を合成して正規化した電流分布を求める。

ここで、(5a)式の両辺を測定磁界ベクトル U_x のノルム $\|U_x\|$ で正規化すると次式のようになる。

$$\frac{U_x}{\|U_x\|} = \sum_{i=1}^m \alpha_{ix} \frac{\|d_{ix}\|}{\|U_x\|} \cdot \frac{d_{ix}}{\|d_{ix}\|}, \quad (7)$$

(7)式の両辺の列ベクトル U_x , d_{ix} を転置し、さらに $d_{ix}/\|d_{ix}\|$ との内積をとると、

$$\begin{aligned} \gamma_{ix} &= \sum_{j=1}^m \alpha_{jx} \frac{\|d_{jx}\|}{\|U_x\|} \cdot \frac{d_{jx}^T}{\|d_{jx}\|} \cdot \frac{d_{ix}}{\|d_{ix}\|} \\ &= \sum_{j \neq i}^m \alpha_{jx} \frac{\|d_{jx}\|}{\|U_x\|} \cdot \frac{d_{jx}^T}{\|d_{jx}\|} \cdot \frac{d_{ix}}{\|d_{ix}\|} \\ &\quad + \alpha_{ix} \frac{\|d_{ix}\|}{\|U_x\|} \\ &\approx \alpha_{ix} \frac{\|d_{ix}\|}{\|U_x\|}, \end{aligned} \quad (8)$$

となる。これは、(6a)式が(8)式に近似できることに基づいている。(8)式は d_1 のノルム $\|d_1\|$ が大きいほど因子係数も大きくなることを示している。言い換えると、電流と磁界の位置が近いほど正確に求まることを意味している。また、 γ の y 成分である(5b)式および γ の z 成分である(5c)式においても同様である。

3. 例題

具体的な例題として、本稿では、1)ブロック状の電流が分布して流れている場合、2)二個のブロック状の電流が互いに逆方向に分布して流れている場合、3)L字形のブロック状の電流が分布して流れている場合、4)単一ループ状の電流が分布して流れている場合、5)二つのループ状電流が8字形に分布して流れている場合、6)二つのループ状電流が平行かつ互いに逆方向に分布して流れている場合について取り上げる。また、最後に、5)について d_1 のノルムの影響を吟味するために z 軸の正方向へ $x-y$ 平面に対して電流分布を平行移動させた場合を取り上げる。これらの例題について測定磁界は測定面に対する法線方向成分を用いる。また、磁界の測定面は全周辺(立方体の6側面)とし、測定点数は $6 \times 6 \times 6 = 216$ 点とする。

図2(a)~(c)に $y-z$ 平面と平行して流れるブロック状電流分布の正解を示し、図2(d)~(f)は図2(a)~(c)のそれぞれに対応する因子分析法による推定結果を示す。

図2(d)~(f)の結果は、ブロック状の電流はほぼ正確に推定できるが、図2(c)のような変曲点を持つ電流分布はベクトル的に合成された電流分布として推定されることを示している。

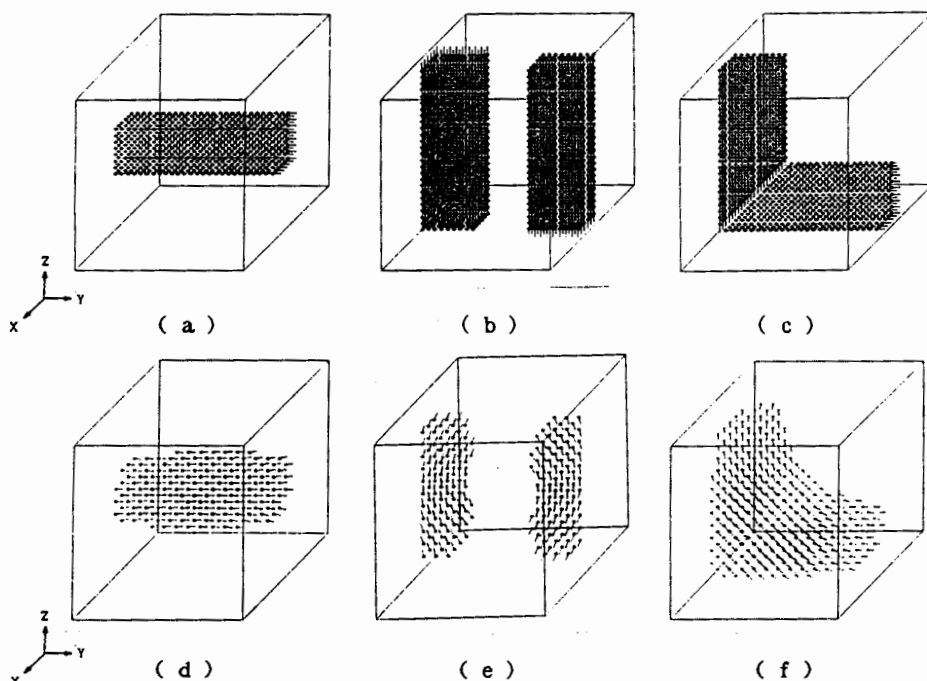


図2. (a)~(c)は正解の電流分布、(d)~(f)は因子分析法による推定結果。但し、 $m=13 \times 13 \times 13$ 、コントラストを上げるため上位80%以上の推定結果を示した。

図3 (a)~(c)に $x-y$ 平面に 45° の角度を持つブロック状電流分布の正解を示し、図3 (d)~(f)は図3 (a)~(c)のそれぞれに対応する因子分析法による推定結果を示す。

図3 (d)~(f)の結果は、傾斜を持ったブロック状電流分布もほぼ推定できるが、変曲点を持つ図3 (c)のような電流分布は図2 (c)と同様にベクトルの合成された電流分布として推定されることを示している。

図4 (a),(b)に単一ループ状に電流が分布している場合の正解を示し、(c),(d)に因子分析法による推定結果を示す。

図4 (c),(d)の結果は、ループ状に分布する電流もほぼ正確に推定されるが、測定面(立方体の各面)に近い程、明確に推定されることを図4 (d)は示している。

図5 (a),(b)に電流が8字形に分布している場合の正解を示し、(c),(d)に因子分析法による推定結果を示す。

図5 (c),(d)の結果は、8字形に流れる電流は中心部が測定面より離れているために正確に推定できず、測定面に近い端部の電流のみ推定されることを示している。

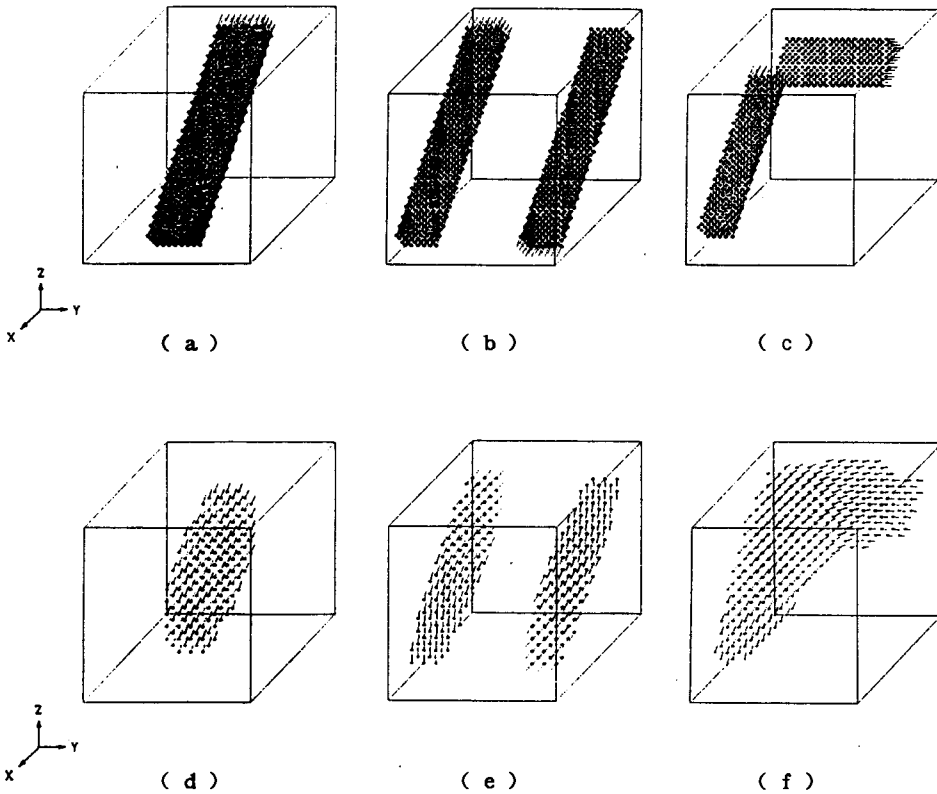


図3. (a)~(c)は正解の電流分布、(d)~(f)は因子分析法による推定結果。但し、 $m=13 \times 13 \times 13$ 、コントラストを上げるため上位80%以上の推定結果を示した。

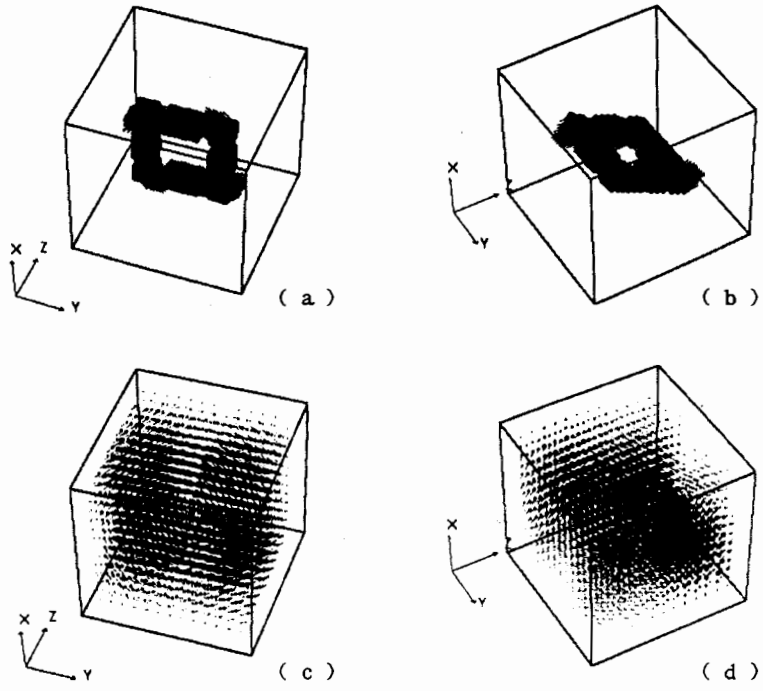


図4.(a),(b)は正解の電流分布、(c),(d)は因子分析法による推定結果。

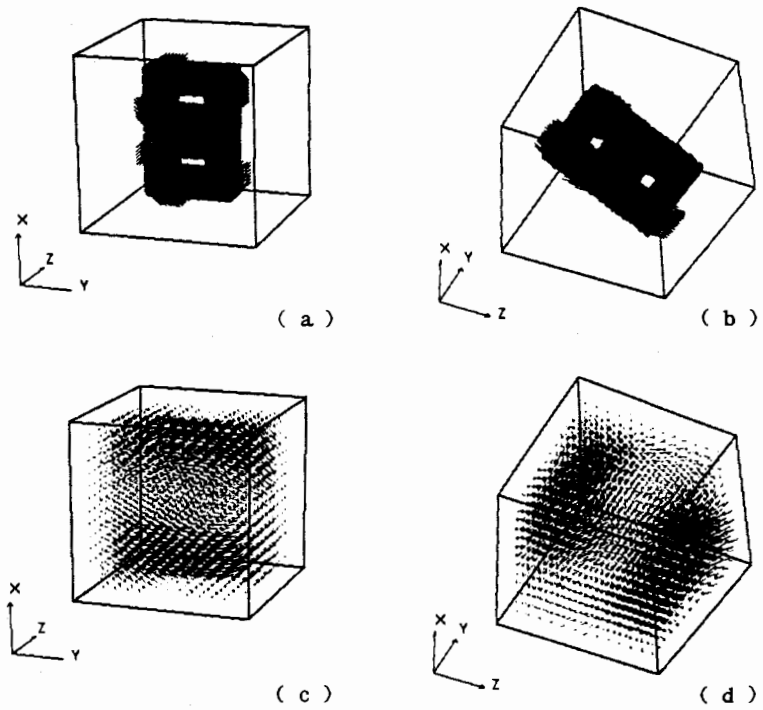


図5.(a),(b)は正解の電流分布、(c),(d)は因子分析法による推定結果。

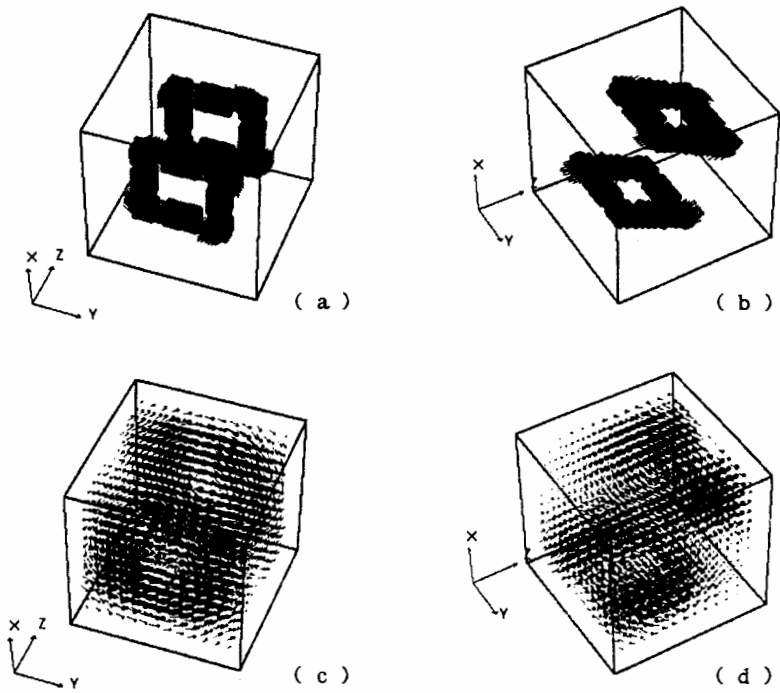


図 6 .(a),(b)は正解の電流分布、(c),(d)は因子分析法による推定結果。

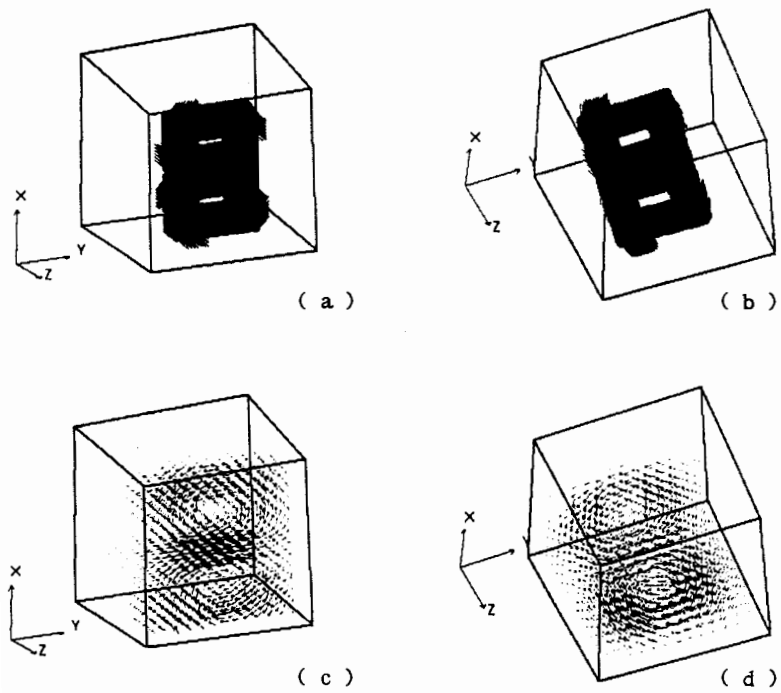


図 7 .(a),(b)は正解の電流分布、(c),(d)は因子分析法による推定結果。

図6 (a),(b)に二つのループ状電流が平行かつ互いに逆方向に流れている場合の正解を示し、(c),(d)に因子分析法による推定結果を示す。

図6 (c),(d)の結果は、互いに逆方向へ環流する電流は特定の測定面に平行に分布しなくても、ほぼ正確に推定されることを示している。

図7 (a),(b)に d_1 のノルムの影響を吟味するために z 軸の正方向へ $x-y$ 平面に対して電流分布を平行移動した場合の正解を示し、(c),(d)に因子分析法による推定結果を示す。

図7 (c),(d)の結果は、8字形に環流する電流が、図5 (a),(b)のように立方体の中心部に電流が分布している場合は正確に推定できないが、いずれかの測定面に片寄っていれば、ほぼ正確に推定できることを示している。

4. まとめ

本稿では、従来の解析的な理論では不可能であった三次元電流分布が、因子分析法によってある程度推定可能であることを示した。これは、ディジタル計算機を前提とする現代工学の手法は、従来の解析的な手法では不可能であった問題を近似的ではあるが解析可能であることを示唆している。

参考文献

- [1] W.Kullmann et al., "Fourier Imaging of Electrical Currents in the Human Brain from Their Magnetic Fields," IEEE Transactions on Biomedical Engineering., Vol.BME-34, No.11, pp.837-842, November(1987).
- [2] 日野 幹雄 著, スペクトラム アナリシス(朝倉書店,1991年5月)。
- [3] 山田 尚生 他, 立方体中の電流分布推定, The First MAGDA Conference, pp.241-244, April(1992)。

原稿受付日	平成4年6月19日
-------	-----------