

局所直交座標系による 磁界系逆問題解析

The inverse problem analysis by local orthogonal coordinate systems

早乙女英夫 早野誠治 齊藤兆古
H. Saotome, S. Hayano and Y. Saito

法政大学 工学部
College of Engineering, Hosei University

1. まえがき

近年、超伝導を用いた超高感度磁束計，SQUIDの実用化と普及から、生体内電流に起因する磁界（磁束密度）分布測定が可能となり、その医学的診断能力が評価され、実用化が期待されている。SQUID磁束計による生体異常診断の利点は、完全な非接触・非侵襲的であり、測定結果から三次元的な電流分布が推定可能であること等にある。これは、レントゲン撮影やX線，MRI-CTなどの様に、生体外部から内部へのエネルギー注入がないため生体に対して本質的に安全な方法であり、また生体内部の磁界源を捜す，“Inverse Source Problem”として位置づけられる。この種の逆問題の解析法として、筆者らはSampled Pattern Matching法（以下、SPM法と略す。）を提案し、これを心磁図に適用してWolff-Parkinson-White症候群を呈する患者のKent束およびJames線維部分の欠陥推定に成功した⁽¹⁻³⁾。本稿では、円筒および球座標系において成立する磁界源と磁界間の局所直交座標系により、SPM法のアルゴリズムの高速演算が可能となることを示す。

2. 磁界系逆問題

2.1. 磁界系逆問題の定式化

静磁界系において、磁界 H と電流密度 J との関係を積分形で表すと、 V を電流の推定領域として、

$$H = \nabla \times \int_V G J dv \quad (1)$$

となる。ここで、 G はグリーン関数で、磁界 H とその源となる電流密度 J との距離を s として、三次元空間では、

$$G = 1 / (4 \pi s) \quad (2)$$

で与えられる。(1)式は、数学的に原関数(original function) J から像関数(image function) H への写像(mapping)と考えることができる。

(1)式を離散化するために、電流の推定領域を ΔV の体積を持つ m 個の領域に分割し、磁界測定面を n 分割する。 ΔV に分割された各領域での電流密度を J_j ($j=1 \sim m$) とし、磁界測定点 i の磁界を H_i ($i=1 \sim n$) とすると、(1)式は、

$$H_i = \sum_{j=1}^m |J_j \Delta V| \frac{e_j \times e_{s_{ij}}}{4 \pi s_{ij}^2} \quad (3)$$

と離散化される。ここで、 $e_{s_{ij}}$ および e_j は、 i 点と j 点との距離 s_{ij} 方向の空間単位ベクトルおよび電流密度 J_j と同じ向きの空間単位ベクトルである。また、一般に磁界の測定点数 n に比較して電流の推定領域の分割個数 m の方が圧倒的に多く、

$$m \gg n \quad (4)$$

の関係がある。(3)式が静磁界系逆問題のシステム方程式である。

2.2. Sampled Pattern Matching法

(3)式で、 $J_j \Delta V$ は電流双極子ベクトルであり、その大きさを α_j とすると、

$$U = \sum_{j=1}^m \alpha_j d_j \quad (5)$$

と書ける。ただし、

$$U = [H_1, H_2, \dots, H_n]^T \quad (6)$$

$$d_j = \{1 / (4 \pi)\} \cdot$$

$$[e_j \times e_{s_{1j}} / s_{1j}^2, e_j \times e_{s_{2j}} / s_{2j}^2, \dots, e_j \times e_{s_{nj}} / s_{nj}^2]^T \quad (7)$$

である。

(5)式において、磁界パターンベクトル U を構成する最初の最も支配的な電流双極子の位置は、Cauchy-Schwarzの関係式により求まり、

$$\gamma_j = U^T \cdot d_j / (\|U\| \cdot \|d_j\|), \quad j = 1 \sim m \quad (8)$$

の最大値をとる j 点である。

第2番目の電流双極子の位置は、 k 点を最初の電流双極子の位置とすると、

$$\gamma_j = U^T \cdot (d_k + d_j) / (\|U\| \cdot \|d_k + d_j\|),$$

$$j = 1 \sim m, \quad j \neq k \quad (9)$$

の最大値をとる j 点である。以後、パターン的一致指数 γ が大きくなる限り、(9)式と同様に新しい列ベクトル d_j を追加し、 γ が最大となった時点で計算を終了する。(4)式の条件があるため、 α_j の個々の値を求めることはできないが、このアルゴリズムにより電流双極子の一意的な分布パターンを求めることができる(4.5)。

(5)式の様な方程式を解く問題に、因子分析法が適用される。通常の因子分析法は、(4)式の条件と反対、すなわち $m < n$ であるため、非直交の因子ベクトル d_j は、適当な操作によって直交化することができ、直交基底ベクトル展開により因子評点 α_j を求めることができる(6)。しかしながら、(4)式の条件があるところこの手法は適用できず、因子ベクトル d_j が非直交のまま問題を扱わなければならない。このことは、(1)式において、既知の像関数 H から求めようとする原関数 J への逆写像(変換)が一意的でない事を意味する。また、主成分分析を行ったとしても、(8)式の最初の支配的な電流双極子を求めただけにすぎない。これは、 N, S の2磁極から成る磁界パターンを与える電流双極子を求めたことに対応する。一方、SPM法では、(8)式で最大値 γ_k をとるベクトル d_k をパイロットベクトルとして第2の電流双極子を求めるプロセスを行うので、 $N-S$ 極が2対存在する磁界パターンに対する因子分析を行ったことになる。以後同様のプロセスを続けることから、SPM法は、複数個の電流双極子を前提として測定される磁界分布の因子分析を行う、一般化された因子分析法とも解釈することができる。

3. 局所直交座標系

ある面で、その面の法線方向の磁界分布が与えられた時、推定される電流は測定面に平行な面上の成分しか求められないため、得られる結果が電流の連続性、すなわち、

$$\nabla \cdot J = 0 \quad (10)$$

が必ずしも満足できないことを前提として議論を進める。

測定面に垂直な方向の成分の磁界が測定された時、測定面と磁界源座標に共通な局所直交座標系を考えたい。磁界源となる電流が存在する座標として、任意の直交座標系が考えられる。電流を互いに直交する各成分に分解し、これらの作る磁界パターン間の内積が零となれば、磁界系と電流系で共通の局所直交座標系が設定できたことになる。

これは $x-y-z$ 座標系では成立しないが(3)、円筒座標系および球座標系はこ

の条件を満足する。

3.1. 円筒座標系

図1の測定面P上のz方向磁界成分 H_z は磁界源平面座標 P' 上の電流双極子 α のrおよび θ 方向成分 α_r および α_θ の作る磁界成分 H_{zr} および $H_{z\theta}$ の和として与えられる。

$$H_z = H_{zr} + H_{z\theta} \quad (11)$$

磁界源 (r, θ, z) から磁界測定点 $(r_r, \theta_r, 0)$ への位置ベクトルを s 、また電流双極子の各成分をベクトル α_r および α_θ として扱い、z方向の空間単位ベクトルを e_z とすると、

$$H_{zr} = \frac{\alpha_r \times s}{4\pi s^3} \cdot e_z \quad (12a)$$

$$H_{z\theta} = \frac{\alpha_\theta \times s}{4\pi s^3} \cdot e_z \quad (12b)$$

となる。また、ベクトル α の成分 α_r および α_θ を用いて表すと、

$$H_{zr} = \frac{\alpha_r \xi}{4\pi s^3} \quad (12a')$$

$$H_{z\theta} = \frac{\alpha_\theta \eta}{4\pi s^3} \quad (12b')$$

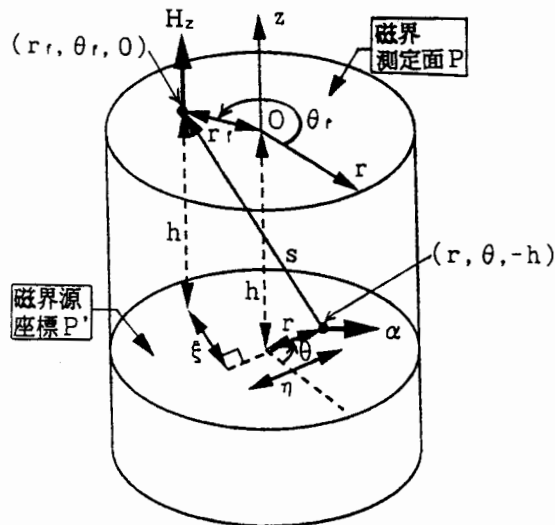


図1. 円筒座標系

となり，測定面 P に渡っての内積について、

$$\int_P H_{zr} H_{z\theta} dS = 0 \quad (13)$$

を満足する。ただし、

$$\xi = r_r \sin \Delta \theta \quad (14a)$$

$$\eta = r - r_r \cos \Delta \theta \quad (14b)$$

$$\Delta \theta = \theta_r - \theta \quad (14c)$$

$$s = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + z^2} \quad (14d)$$

である。

(5) 式は、円筒座標系では、

$$U = \sum_{j=1}^n \alpha_{rj} \mathbf{d}_{rj} + \sum_{j=1}^n \alpha_{\theta j} \mathbf{d}_{\theta j} \quad (15)$$

と書き直され、右辺の第 1 項の r 方向および第 2 項の θ 方向に対して、それぞれ単独に、Cauchy-Schwarz の関係式によりパターンマッチングが実行される。これは、r 方向の任意の因子ベクトルがすべての θ 方向の因子ベクトルと直交することから、

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^T \cdot \mathbf{d}_{rh'} &= \sum_{j=1}^n \alpha_{rj} \mathbf{d}_{rj}^T \mathbf{d}_{rh'} \\ &\quad + \sum_{j=1}^n \alpha_{\theta j} \mathbf{d}_{\theta j}^T \mathbf{d}_{rh'} \\ &= \sum_{j=1}^n \alpha_{rj} \mathbf{d}_{rj}^T \mathbf{d}_{rh'} \\ &\equiv \alpha_{rh'} \end{aligned} \quad (16)$$

により r 方向のパターンマッチング指数が計算されるためである。ただし、 α はベクトルのノルムにより正規化を行った量であることを示し、 $j \neq h$ のとき、

$$|\mathbf{d}_{rj}^T \mathbf{d}_{rh'}| < 1 \quad (17)$$

となる関係を用いた。また、 θ 方向の任意の因子ベクトルもすべての r 方向の因子ベクトルと直交することから、 θ 方向のパターンマッチング指数の計算においても同様に、

$$\mathbf{U}^T \cdot \mathbf{d}_{\theta h'} \equiv \alpha_{\theta h'} \quad (18)$$

を得る。

以上のことから、図1に示した円筒座標系を用いることでSPM法のパターンマッチング演算を r および θ 方向それぞれ独立に行うことができ、従来、解ベクトルの測定面と平行な平面上における角度成分を求めるために行っていた角度方向の離散化による分割が必要無くなり、SPM演算を高速に行うことができる。

3.2. 球座標系

図2の球座標系において、球表面の一部もしくは全部から成る測定面P上の r 方向磁界成分 H_r は、球内部の電流双極子 α の θ および ϕ 方向成分 α_θ および α_ϕ の作る磁界成分 $H_{r\theta}$ および $H_{r\phi}$ に分解して考えることができる。

$$H_r = H_{r\theta} + H_{r\phi} \quad (19)$$

測定面の原点からの距離を R とし、電流双極子 α の座標 (r, θ, ϕ) から磁界測定点 (R, θ_r, ϕ_r) への位置ベクトルを s とする。ここで、電流双極子 α の各成分をベクトルとして扱おうと、

$$H_{r\theta} = \frac{\alpha_\theta \times s}{4\pi s^3} \cdot e_R \quad (20a)$$

$$H_{r\phi} = \frac{\alpha_\phi \times s}{4\pi s^3} \cdot e_R \quad (20b)$$

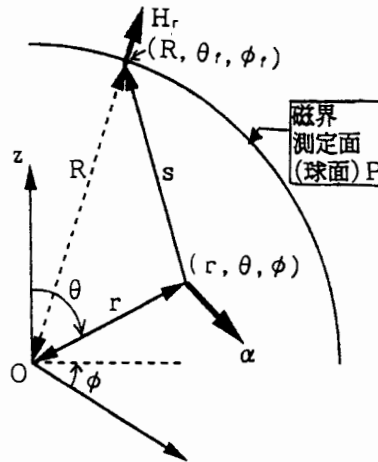


図2. 球座標系

となり，測定面 P に渡っての内積について，

$$\int_P \mathbf{H}_r \cdot \mathbf{H}_{r'} dS = 0 \quad (21)$$

が成り立つ。ただし， \mathbf{e}_R は磁界測定点 (R, θ_r, ϕ_r) における r 方向の空間単位ベクトルであり，点 (r, θ, ϕ) に平行移動して，

$$\mathbf{e}_R = [\sin\theta \ r \sin\theta (\cos\Delta\phi - 1) + \cos\Delta\theta, \\ \sin\theta \ r \cos\theta (\cos\Delta\phi - 1) + \sin\Delta\theta, \sin\theta \ r \sin\Delta\phi]^T \quad (22)$$

となり，点 (r, θ, ϕ) におけるベクトル \mathbf{s} は，

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} \sin\theta \cos\phi & \sin\theta \sin\phi & \cos\theta \\ \cos\theta \cos\phi & \cos\theta \sin\phi & -\sin\theta \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \end{bmatrix} \\ \times \begin{bmatrix} R \sin\theta_r \cos\phi_r - r \sin\theta \cos\phi \\ R \sin\theta_r \sin\phi_r - r \sin\theta \sin\phi \\ R \cos\theta_r - r \cos\theta \end{bmatrix} \quad (23)$$

で与えられる。また，(22) 式において，

$$\Delta\theta = \theta_r - \theta \quad (24a)$$

$$\Delta\phi = \phi_r - \phi \quad (24b)$$

である。

(5) 式は，球座標系では，

$$\mathbf{U} = \sum_{j=1}^m \alpha_{\theta j} \mathbf{d}_{\theta j} + \sum_{j=1}^m \alpha_{\phi j} \mathbf{d}_{\phi j} \quad (25)$$

と書き直され，円筒座標系の場合と同様に， θ 方向と ϕ 方向に対して，それぞれ単独に，Cauchy-Schwarz の関係式によりパターンマッチングが実行でき，

$$\mathbf{U}^T \cdot \mathbf{d}_{\theta h} \cong \alpha_{\theta h} \quad (26)$$

$$\mathbf{U}^T \cdot \mathbf{d}_{\phi h} \cong \alpha_{\phi h} \quad (27)$$

を得る。

従って，球座標系においても電流双極子の $\theta - \phi$ 面上の角度方向の離散化による分割個数 m の増加が不要となり，高速の SPM 演算が可能となる。

4. 例題

図3および図4は、円筒座標系および球座標系において、測定面磁界パターンをこれらの源である電流双極子の直交成分によって分解した例を示すものであり、黒および白の円は正および負の磁界の強さを表している。電流双極子の位置はそれぞれ、図3では $(0.8, \pi/6, 0.8)$ 、図4では $(0.8, \pi/12, \pi/12)$ であり、電流双極子ベクトルの成分はそれぞれの座標系において $(1, 1, 0)$ および $(0, 1, 1)$ とした。また、円筒座標系では測定面の半径を単位長とし、球座標系では測定球面の半径を単位長とした。ただし、図4の測定面は、 $\theta_r \leq \pi/4$ の領域を示している。図3(b)、(c)および図4(b)、(c)から、(13)式および(21)式が成立していることがわかる。

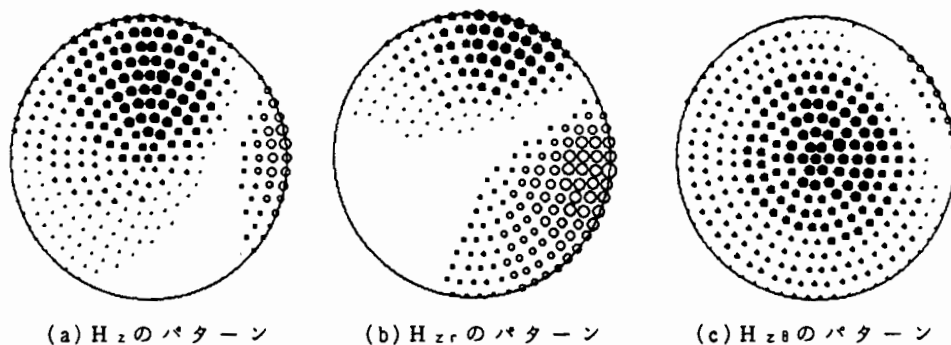


図3. 円筒座標系による磁界パターンの分解

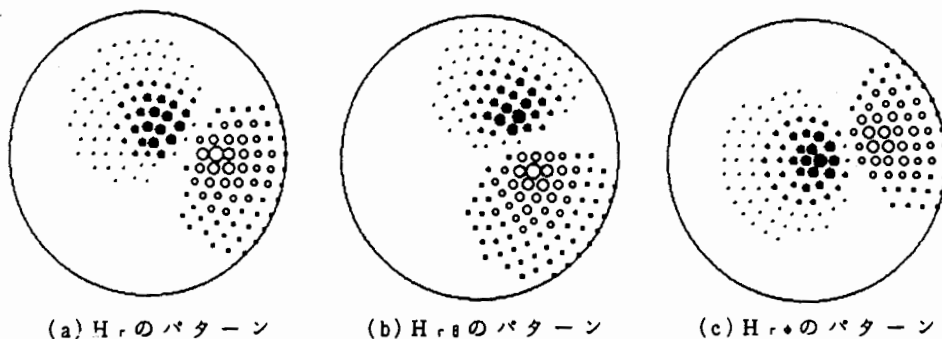


図4. 球座標系による磁界パターンの分解

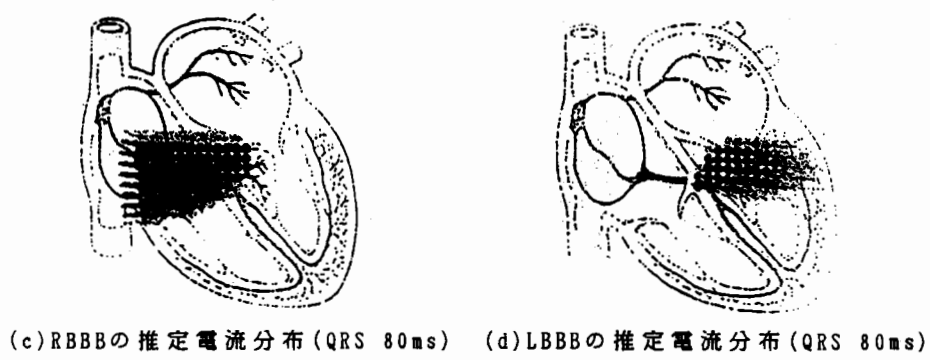
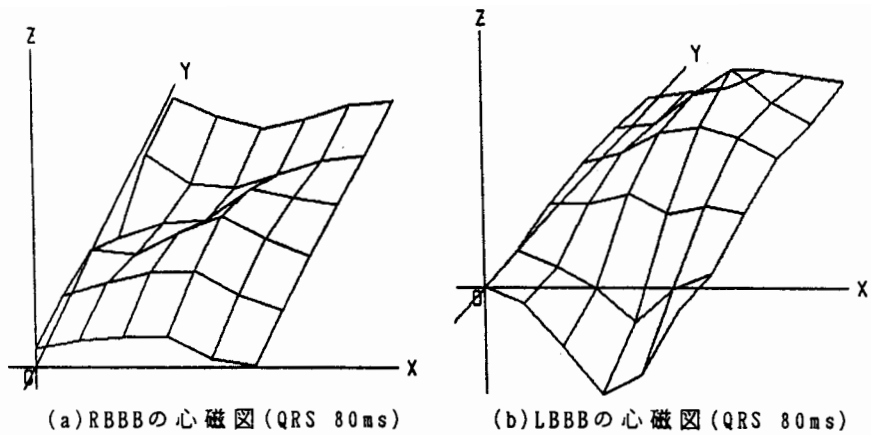


図5. 円筒座標系によるヒトの心臓内電流分布推定

図5は、心臓に疾患のある患者の心磁図から円筒座標系による高速SPM法によって心臓内の電流分布推定を行った結果であり、 $\gamma \geq 0.9$ の分布を示すものである。図5(c)は、図5(a)のRight Bundle Branch Block症候群を呈する患者の心磁図より推定した電流分布で、QRS波が80ms時のものである⁽⁷⁾。最も支配的な電流は患者の左方から右方へ流れている様子がわかる。また、図5(d)は、図5(b)のLeft Bundle Branch Block症候群を呈する患者の心磁図より推定した電流分布で、QRS波が同じく、80ms時のものである⁽⁷⁾。この場合は、患者の右方から左方へ電流が流れている様子がわかる。

5. 結言

本稿では、筆者らが従来から提唱しているSPM法を、複数極から成る磁界パターンを前提とした、一般化因子分析法と位置づけられることを明かに

した。また、磁界測定面座標で磁界パターン成分間の直交性が成立する局所直交座標系は、円筒座標系および球座標系であることを示し、これにより従来必要であった電流双極子の角度方向の離散化が不要となり、SPM法の高速度演算が可能となった。

本手法を同心円状あるいは球面状に配置されたSQUIDセンサから成る装置の解析アルゴリズムに適用することで、高速でreal timeの医療診断技術の確立が期待できる。

参考文献

- 1) 早乙女英夫, 他, 「生体磁界における逆問題」, 電気学会論文誌 A 分冊 pp. 279-286, 平成4年4月号.
- 2) 早乙女英夫, 他, 「静的電磁界系における逆問題」, 電気学会マグネティックス研究会資料 MAG-92-71, 1992年2月.
- 3) 早乙女英夫, 他, 「生体中の電流分布推定法の一考察」, 電気学会マグネティックス研究会資料 MAG-92-79, 1992年3月.
- 4) 早乙女英夫, 他, 「生体中の電流分布推定 - 理論的基礎 -」, 電気学会マグネティックス研究会資料 MAG-91-219, 1991年10月.
- 5) 橋田和泰, 他, 「生体中の電流分布推定 - 心臓の電流分布 -」, 電気学会マグネティックス研究会資料 MAG-91-220, 1991年10月.
- 6) 日野幹雄, 「スペクトル解析」, 朝倉書店, 1991年 5月初版第19刷.
- 7) K. Watanabe et al., "Analysis of Activation Sequence by Isomagnetic and Vector Arrow Maps." Biomagnetism '87, Tokyo Denki University Press, Japan, 1988.

原稿受付日	平成4年6月18日
-------	-----------