

複素透磁率を用いた開領域動磁界の有限要素解

Finite Element Solution of The Open Boundary Magnetodynamics Fields
Using Complex Permeability宮崎 淳 , 早野 誠治 , 斎藤 兆古
A.Miyazaki , S.Hayano , Y.Saito法政大学 工学部
College of Engineering , Hosei University

1、まえがき

ディジタル計算機の普及とともに、有限要素法で代表される数値解析法が多くの工学、理学系の偏微分方程式で記述された問題の解析に広く活用されている。有限要素法は、その本質的な性質として境界条件が明確に規定された、いわゆる閉領域中のフィールド計算を前提としている。このため、フィールドが無遠慮点にまで広がる開領域問題には直接適用することはできない。しかし、工学、理学系の偏微分方程式で記述される問題の多くは開境界を有する。特に磁界系を扱う問題では、空間に広がる磁界が存在するため、この開境界を考慮しなければ正確な結果を期待できない。有限要素法は開境界に弱い欠点を持つが、磁気飽和などの強い非線形性に対応できることや、複雑な形状に対する適応性が高く汎用プログラムの作成に適している等の多くの利点を持つ。一方、開境界問題を前提とする境界要素法が提案されたが、境界要素法は線形系の基本解を用いるため、実用問題で考慮すべき非線形性が導入できない決定的な欠点を持つ[1]。筆者等は、電気映像法を拡張した双対映像法によって、開領域問題を零境界問題と対称境界問題に分解し、それぞれの有限要素解を組み合わせることで開領域問題の有限要素解を得ることが可能であることを立証した[2-5]。

また、高周波で励磁される磁性材料の磁化特性は、磁束密度が低いことから、線形化されたChua型磁化特性モデルから導かれる複素透磁率によって、極めて正確に再現できることを報告した[6-8]。

本稿では、高周波誘導加熱などの高周波励磁を前提とした開領域動磁界系問題に対して、磁性体の履歴特性をChua型モデルから導かれる複素透磁率で導入し、開境界を双対映像法を用いて開領域問題に置き換え有限要素解を得る方法を報告する。

2、双対映像法

2、1 原理

第1(a)図に示すように、二次元問題空間中の任意の電流 i を考える。この電流に対して、原点から距離 d の位置に $-(d/a)i$ のイメージ電流を想定すると、第1(a)図に示すように電流 i を取り囲む半径 a の円上でベクトルポテンシャル A は零となる。従って、この円上では、円の半径方向の磁束密度 B_r は $B_r = \partial A / \partial t = 0$ となる。よって、半径 a の仮想境界上に零境界条件 $A = 0$ が設定され、開領域磁界の回転方向成分を求めることができる。問題空間中の他の電流に対しても、原点 o と半径 a の仮想境界が共通となるようにイメージ電流を想定すれば、分布した電流に対しても回転方向成分の磁界を表すべ

クトルポテンシャルAを求めることができる。

大部分の磁界系の問題では、系全体としての電流の総和は零となるから、仮想境界の外側にあるイメージ電流の総和も零にならなければならない。よって、

$$\sum_{p=1}^q (d_p/a) i_p = a \sum_{p=1}^q (d_p/a^2) i_p \quad , \quad (1a)$$

$$= a \sum_{p=1}^q (1/r_p) i_p = 0 \quad , \quad (1b)$$

が成り立たねばならない。ここで、 q は電流の総数を表し、 d_p は原点 o から i_p の電流に対するイメージ電流までの距離、 r_p は原点 o から電流 i_p までの距離を表す。(1b)式の条件は、原点 o でベクトルポテンシャルAが零となることを意味する。

つぎに、磁界源として電流 i の代わりに磁荷 m を第1(b)図に示すように考える。この磁荷にたいして、原点から距離 d の位置に $-(d/a)m$ のイメージ磁荷を想定すると第2(b)図に示すように磁荷 m を取り囲む円上でスカラーポテンシャル U は $U=0$ となる。したがって、半径 a の仮想境界上で、回転方向の磁界 H_t は $\partial U/\partial t=0$ であるため零となる。すなわち、この半径 a の円形仮想境界上に $U=0$ の境界条件を設定することで、開領域磁界の発散方向成分が求められる。このスカラーポテンシャル $U=0$ の境界条件をベクトルポテンシャルAで表すと、 $\partial A/\partial n=0$ の対称境界条件に対応する。これは、半径 a の円形仮想境界上に対称境界条件を設定することで、開領域磁界の発散方向成分を求めることができることを意味する。

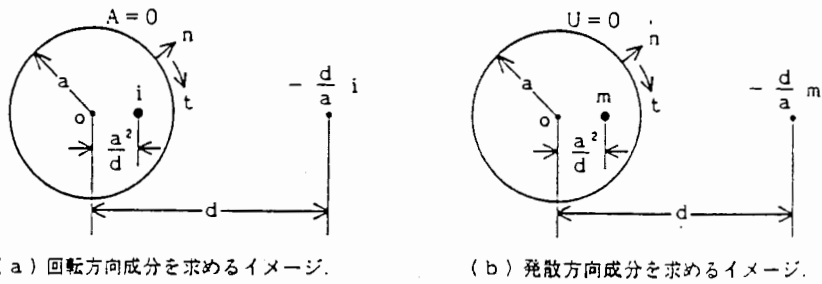
二次元の開領域磁界を求める手順を整理すると以下ようになる。

- [1] 問題対象空間を離散化する。
- [2] 各節点から、

$$a \sum_{p=1}^q (1/r_p) i_p = 0 \quad , \quad (2)$$

を満足する点を求める。

- [3] (2)式を満足する節点を原点 o として、問題空間を取り囲む半径 a の円形仮想境界を描く。
- [4] 原点 o のベクトルポテンシャルを $A=0$ 、半径 a の円形仮想境界上で $A=0$ の境界条件を設定し、回転方向磁界を表すベクトルポテンシャルを求める。
- [5] 原点 o のベクトルポテンシャルを $A=0$ 、半径 a の円形仮想境界上で $\partial A/\partial n=0$ の対象境界条件を設定し、発散方向成分を表すベクトルポテンシャルを求める。
- [6] 回転方向成分と発散方向成分を表す解ベクトルの平均値が、開領域の磁界を表す解ベクトルとなる。



第1図 二次元問題における双対映像法

2、2 システム方程式

2、2、1 基礎方程式

変位電流の無視できる低周波領域で、電磁界を支配する Maxwell の方程式は、

$$\nabla \times E = -\partial B / \partial t \quad (3a)$$

$$\nabla \times H = J \quad (3b)$$

で与えられる。ここで、 E 、 H 、 B 、 J 、 t はそれぞれ電界、磁界、磁束密度、電流密度、および時間を表す。(3a)式において、 $\nabla \cdot \nabla \times E = -\nabla \cdot (\partial B / \partial t) = 0$ が成り立つため、 $\nabla \cdot B = 0$ を自動的に満足させるように、次のベクトルポテンシャル A を導入する。

$$\nabla \times A = B \quad (4)$$

次に正弦波定常状態を想定し、磁界 H と磁束密度 B との関係が、複素透磁率 $\mu(\omega)$ を用いて次の構成式で表されるとする。

$$H = B / \mu(\omega) \quad (5)$$

ここで、 ω は電源周波数を f としたとき、 $\omega = 2\pi f$ で与えられる電源角周波数であり、複素透磁率 $\mu(\omega)$ は後述するように Chua 型モデルから導かれる。

(4)、(5)式を(3b)式に代入して、

$$\nabla \times \{1 / \mu(\omega)\} \nabla \times A = J \quad (6)$$

を得る。さらに、(3a)式で、 $\partial / \partial t = j\omega$ として(4)式を代入し、両辺を積分すれば、 ϕ を任意のスカラーポテンシャルとして、

$$E = -j\omega A + \nabla \phi \quad (7)$$

となる。ところで、導電率を κ とすれば、電界 E と電流密度 J は、

$$J = \kappa E \quad , \quad (8)$$

の関係がある。よって、(6)、(7)、(8)式より、

$$\nabla \times \{1/\mu(\omega)\} \nabla \times A + j\omega\kappa A = \kappa \nabla \phi \quad , \quad (9)$$

を得る。(9)式の右辺 $\kappa \nabla \phi$ を外部から供給される電流密度 J_0 とすれば、 $\partial A / \partial z = 0$ であるから、(9)式は、

$$-\{1/\mu(\omega)\} \nabla^2 A + j\omega\kappa A = J_0 \quad , \quad (10)$$

となる。(10)式が解くべき支配方程式であり、左辺第2項がうず電流を表す項となる。

2、2、2 開領域のシステム方程式

(10)式を有限要素法で離散化し、

$$C \bar{X} + D \bar{X} = \bar{F}_0 \quad , \quad (11)$$

を得る。ここで、 C 、 D はそれぞれ(10)式の左辺第1項および第2項に対応する係数行列であり、 \bar{X} は各節点ポテンシャルを要素とする解ベクトル、 \bar{F}_0 は各節点の入力電流を要素とする入力ベクトルである。

いま、問題空間がすべて空気とした場合の係数行列を C_0 とすれば、(11)式は、

$$\begin{aligned} C_0 \bar{X} &= \bar{F}_0 + (C_0 - C - D) \bar{X} \quad , \\ &= \bar{F} \quad , \end{aligned} \quad (12)$$

と変形できる。さらに、 C_0 は円形仮想境界内部の行列 C_{11} 、円形仮想境界上の行列 C_{22} 、そして C_{11} と C_{22} の間を結ぶ C_{12} に分解できる。したがって、仮想境界上には電流が存在しないことを前提として、(12)式は、

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{X}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{f} \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad (13)$$

と書ける。ただし、 $C_{21} = C_{12}^T$ であり、 \bar{X}_1 は領域内部の解ベクトル、 \bar{X}_2 は仮想境界上の解ベクトル、 \bar{f} は内部領域への入力ベクトルである。

さて、 \bar{X}_{1z} を仮想境界を零条件とした場合の零境界解ベクトル、 \bar{X}_{10} 、 \bar{X}_{20} をそれぞれ仮想境界を対称条件とした場合の内部対称境界解ベクトル、および境界解ベクトルとすれば、双対映像法によって次の関係が成り立つ。

$$\begin{bmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{X}_2 \\ \bar{X}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{X}_{10} \\ \bar{X}_{20} \\ \bar{X}_z \end{bmatrix} \quad , \quad (14)$$

(14)式より、次の接続行列Sを得ることができる。

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \quad (15)$$

ここで、 $[X_{1s} \ X_{2s} \ X_z]^T = S [X_1 \ X_2 \ X_z]^T$ が成り立つ。

一方、(13)式から、対称境界条件と零境界条件に対して次のシステム方程式を得ることができる。

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{21} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{X}_{1s} \\ \bar{X}_{2s} \\ \bar{X}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{f} \\ 0 \\ \bar{f} \end{pmatrix} . \quad (16)$$

(16)式は、(15)式の接続行列を用いて、次のように変換される。

$$\left\{ S^T \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{21} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{11} \end{pmatrix} S \right\} \begin{pmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{X}_2 \\ \bar{X}_z \end{pmatrix} = S^T \begin{pmatrix} \bar{f} \\ 0 \\ \bar{f} \end{pmatrix} . \quad (17)$$

(17)式をまとめると次のようになる

$$\begin{pmatrix} 2C_{11} & 2C_{12} & -C_{11} \\ 2C_{21} & 2C_{22} & -C_{21} \\ -C_{11} & -C_{12} & C_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{X}_2 \\ \bar{X}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{f} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} . \quad (18)$$

(18)式で、 $\bar{X}_z = \bar{X}_1 + C_{11}^{-1}C_{12}\bar{X}_2$ であるから、(18)式は、

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & 2C_{22} - C_{21}C_{11}^{-1}C_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{X}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{f}_s \\ 0 \end{pmatrix} , \quad (19)$$

と変形できる。ここで、(12)式の右辺より、(19)式の入力ベクトル \bar{f}_s は、

$$\bar{f} = \bar{f}_s + (C_{11} - C_1 - D_1) \bar{X}_1 , \quad (20)$$

と書くことができるので、結局解くべきシステム方程式は、

$$\begin{pmatrix} C_1 + D_1 & C_{12} \\ C_{21} & 2C_{22} - C_{21}C_{11}^{-1}C_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{X}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{f}_s \\ 0 \end{pmatrix} , \quad (21)$$

となる。ここで、 C_1 、 D_1 は、それぞれ(11)式の行列C、Dの仮想境界内部に対応する部分行列であり、 \bar{f}_s は入力ベクトルである。また、(21)式の残りの行列 C_{11} 、 C_{22} 、 C_{12} ($= C_{21}^T$)は、すべて媒質を空気とした場合の内部領域、仮想境界上および内部と仮想境界を結ぶ部分行列であることに注意が必要である。

(21)式を解くことにより、開領域の解ベクトル \bar{X}_1 、 \bar{X}_2 を得ることができる。

3、複素透磁率 $\mu(\omega)$

3、1 線形化Chua型モデル

磁性材料を時間に対して正弦波状に変化する磁界で励磁したとき、出力として得られる磁束密度も時間に対して正弦波状に変化する場合を線形な動作と定義する。このような線形な動作において、磁気ヒステリシスループは楕円形となり、磁気飽和は無視することができる。

透磁率を μ 、可逆透磁率を μ_r 、さらにヒステリシス係数を s とすれば、磁界 H と磁束密度 B の関係はChua型モデルにより、

$$H + \frac{\mu_r}{s} \frac{dH}{dt} = \frac{1}{\mu} B + \frac{1}{s} \frac{dB}{dt} \quad , \quad (22)$$

によって与えられる[9-11]。線形化モデルでは、パラメータ μ 、 μ_r 、 s は一定値である。また、磁界 H と磁束密度 B は時間に対して正弦波状に変化するから、時間微分 $d/dt = j\omega$ として(22)式に代入すると、複素透磁率 $\mu(\omega)$ は、

$$\begin{aligned} \mu(\omega) &= B/H \quad , \\ &= \mu_R(\omega) - j \mu_I(\omega) \quad , \\ &= \mu \left\{ \frac{s^2 + \omega^2 \mu \mu_r}{s^2 + (\omega \mu)^2} \right\} - j \mu \left\{ \frac{\omega(\mu - \mu_r)s}{s^2 + (\omega \mu)^2} \right\} \quad , \quad (23) \end{aligned}$$

となる。(23)式が本稿で採用する複素透磁率である[6-8]。

3、2 パラメータの決定

(23)式で周波数特性を考えたとき、角周波数 ω の極限をとると、

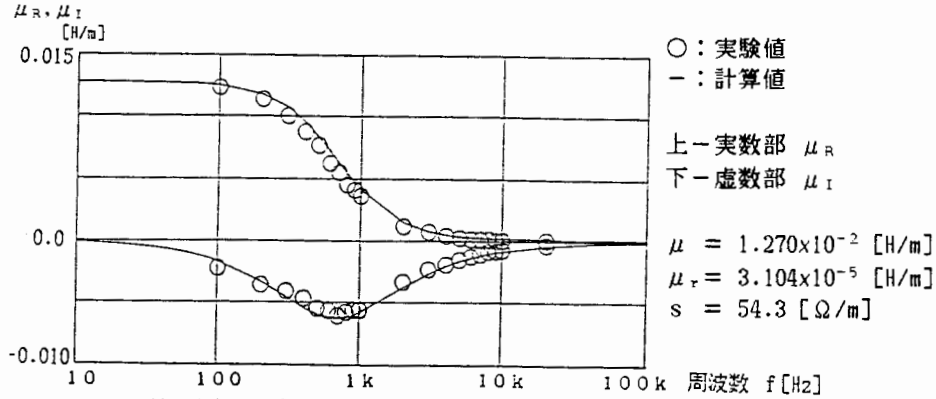
$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \mu(\omega) = \mu \quad , \quad (24a)$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \mu(\omega) = \mu_r \quad , \quad (24b)$$

となる。したがって、(24a)式より透磁率 μ 、(24b)式より可逆透磁率 μ_r がそれぞれ求められる。また、複素透磁率 $\mu(\omega)$ の虚数部 $\mu_I(\omega)$ がピーク値をとる場合、もしくは実数部 $\mu_R(\omega)$ が $\mu_R(\omega) = (\mu + \mu_r)/2$ となる周波数を f_1 とすると、ヒステリシス係数 s は、次式で与えられる[6-8]。

$$s = 2\pi f_1 \mu \quad . \quad (25)$$

第2図に、フェライト（TDK、H5c2）について求めた複素透磁率の周波数特性を示す。ただし、(23)式で計算される複素透磁率は磁性体に表皮効果の影響がないとしたときのものである。



第2図 複素透磁率の周波数特性（TDK、H5c2）

4、数値実験

4、1 解の一意性

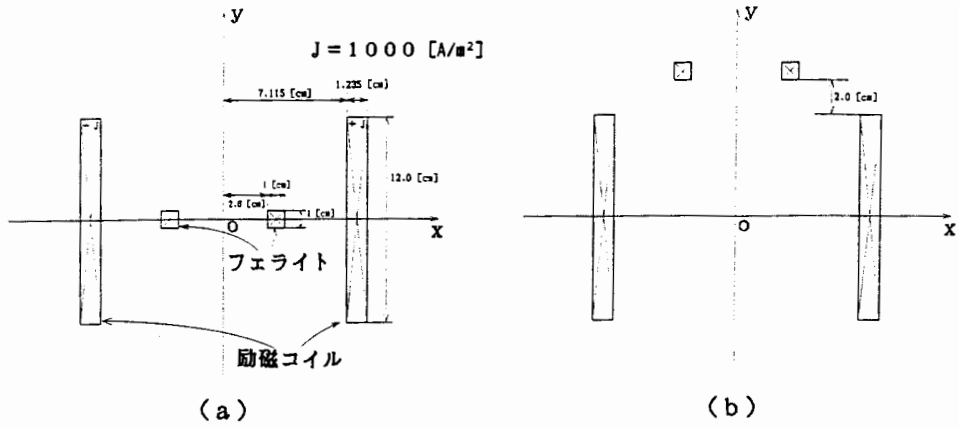
双対映像法によれば、二次元開領域問題では仮想境界は円形となり、その中心は入力電流の分布によって決定されるが、半径 a は問題空間を取り囲む条件を満たす必要性のみであるため一意的に与えられない。このため、仮想境界の半径 a を変化させて内部領域の解の変化を吟味することにより、解の一意性を調べることができる。

第4図に仮想境界の半径を変化させた場合のポテンシャル分布を示す。計算は、第3図に示すような2つのモデルを考え、問題空間の対称性を考慮して第3(a)図の場合には全体の1/4、第3(b)図の場合には全体の1/2の空間について行い、磁性体はフェライト（TDK、H5c2）とした。第4図から、いずれの周波数においても双対映像法による解は、仮想境界の半径 a に関係せず一意的に決まることがわかる。

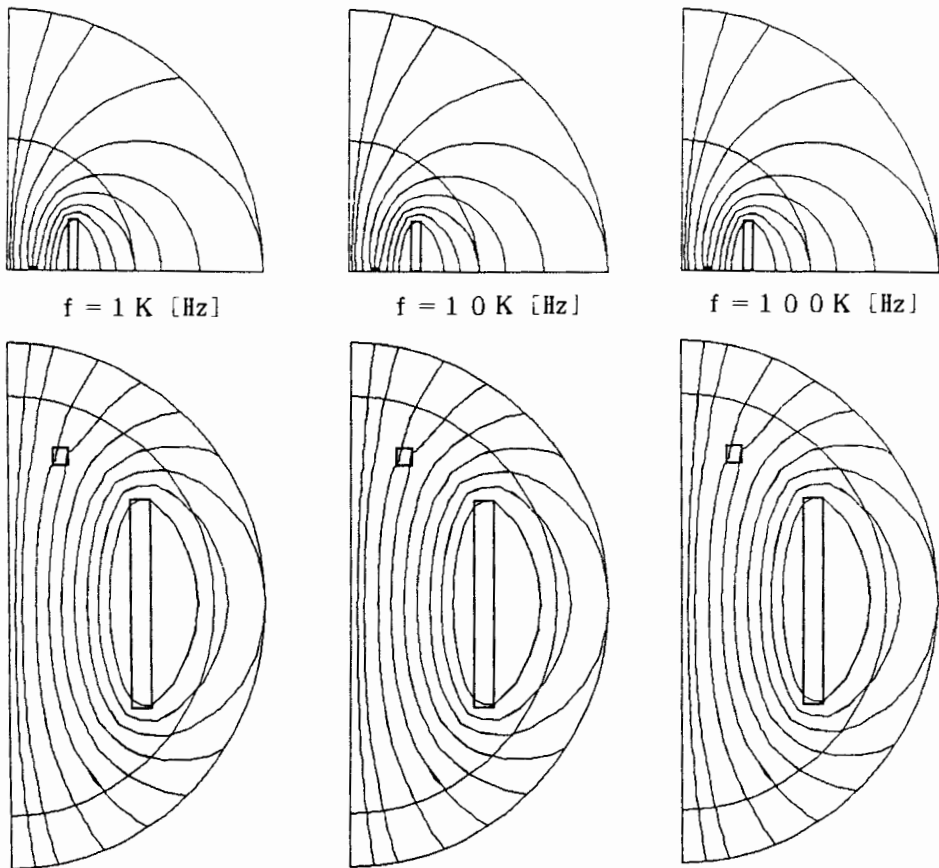
4、2 磁性体内部のポテンシャル分布とヒステリシスループ

次に、開領域を前提とし、周波数を変化させたときの磁性体の内部のポテンシャル分布と、磁性体の内部のヒステリシスループ形状を第5図に示す。計算は第3(b)図のモデルで、仮想境界の半径を $a = 1.5 \text{ cm}$ としたときのものである。

この結果から、比較的周波数の低い 1 M [Hz] 付近では磁性材料は均一に磁化されているように見えるが、実際には中心部ほど磁束密度は大きな値となっていることがわかる。また、周波数が高くなるほど表皮効果の影響が顕著に現れ、磁束密度の大きさが最大となる場所が変わってくるということがわかる。

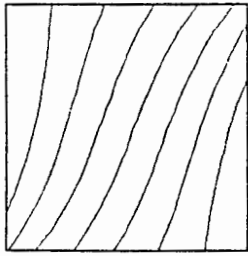


第3図 計算モデル

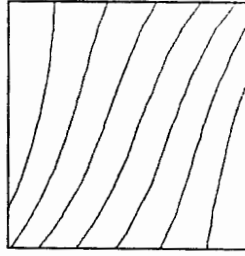


上-第3 (a) 図のモデルで半径 $a = 15\text{cm}, 30\text{cm}$ における解析結果
 下-第3 (b) 図のモデルで半径 $a = 12\text{cm}, 15\text{cm}$ における解析結果
 (Min=0.0 [Wb/m], Max= 8.0×10^{-7} [Wb/m])

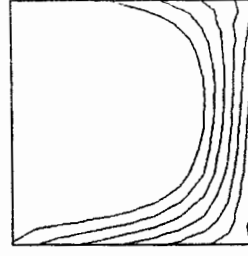
第4図 開領域におけるポテンシャル分布



$f = 1 \text{ M [Hz]}$



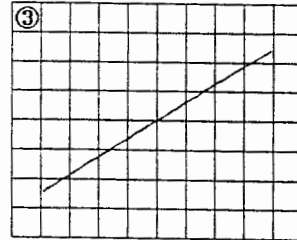
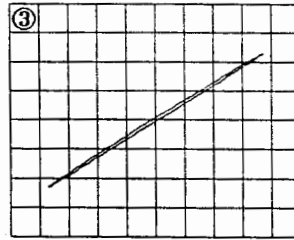
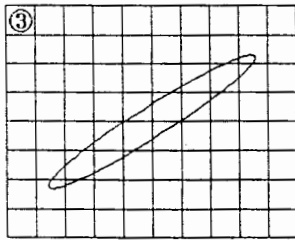
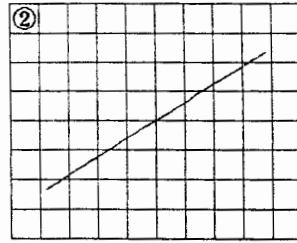
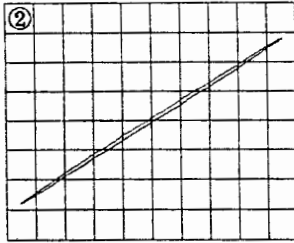
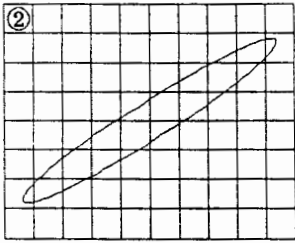
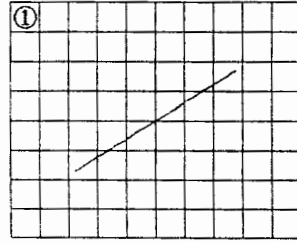
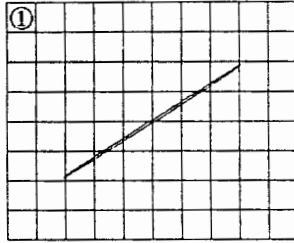
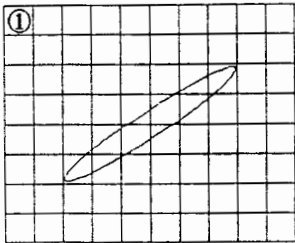
$f = 1 0 \text{ M [Hz]}$



$f = 1 0 0 \text{ M [Hz]}$

(Min= 1.8×10^{-7} [Wb/m], Max= 3.0×10^{-7} [Wb/m])

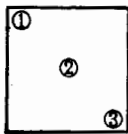
(a) 磁性体内部のポテンシャル分布



$f = 1 \text{ M [Hz]}$

$f = 1 0 \text{ M [Hz]}$

$f = 1 0 0 \text{ M [Hz]}$



横軸 - 0.1 [A/m/div]
縦軸 - 5.0×10^{-6} [T/div]

(b) 磁性体内部のヒステリシスループ形状

第5図 磁性体内部のポテンシャル分布とヒステリシスループ形状

5、結言

本稿では、磁気履歴を呈する系の開領域有限要素解を得る方法の第1段階として、磁性体の履歴特性を複素透磁率で導入し、開領域を双対映像法で閉領域に置き換えて解く方法を提案した。その結果、二次元問題においてはこの方法が十分適用できることが数値実験によって立証された。また、本稿で提案した方法を用いることにより、磁性体にコイルを巻かずに磁化特性を測定する装置の開発が可能であることの見通しを得た。なお、より実用的な軸対称三次元問題についてここで提案された方法を適用し、非接触で磁性体の磁化特性を測定することを検討中である。

参考文献

- [1] C.A.Brebbia ,Editor ,Progress in Boundary Element Method ,Vol.1 (Pentech Press Ltd.,1981)
- [2] Y.Saito,et al ,IEEE Trans. Magn. ,Vol.MAG-23,No.5,pp.3569-3571,Sep.(1987)
- [3] Y.Saito,et al ,J. Appl. Phys. ,63(8),pp.3366-3368,April(1988)
- [4] Y.Saito,et al .IEEE Trans. Magn. ,Vol.MAG-24,No.6,pp.2946-2948,Nov.(1988)
- [5] Y.Saito,et al ,Proc. of the International Symposium on Applied Electromagnetics in Materials ,Edited by K.Miya ,pp.237-245 (Pergamon Press Ltd.,1989)
- [6] 宮崎 他、電気学会 静止器・回転機合同研究会資料、SA-90-34, RM-90-45、1990年8月
- [7] 宮崎 他、電気学会 マグネティックス研究会資料、MAG-90-90、1990年8月
- [8] S.Hayano,et al ,J.Appl. Phys. ,in printing
- [9] Y.Saito,et al ,IEEE Trans. Magn. ,Vol.MAG-22,No.5,pp.647-649,Sep.(1986)
- [10] Y.Saito,et al ,IEEE Trans. Magn. ,Vol.MAG-23,No.5,pp.2227-2229,Sep.(1987)
- [11] Y.Saito,et al ,J. Appl. Phys. ,64(10),pp.5684-5686,Nov.(1988)