

高速電磁界計算の一方法

Faster Computation of Electromagnetic Fields

斎藤 兆古 早野 誠治
Yoshifuru SAITO Seiji HAYANO

法政大学工学部

College of Engineering, Hosei University

1. まえがき

1950年代に、構造力学の分野で誕生した有限要素法は、ディジタル計算機の発達、普及を背景に発展し、偏微分方程式の数値解析法の有力な手法として工学の多くの分野への応用が研究されてきた。これは、電気・電子工学においても例外でなく、有限要素法は、高電圧機器の電界計算や回転機・静止器等の磁界計算、導波路等の電磁波・光波の問題、半導体デバイスシミュレーション等に広範に利用されている。

有限要素法は、問題領域を小さな有限要素に分割し、その要素ごとに簡単な基底関数を用いて未知関数を近似し、領域上の節点における関数値を未知ベクトルとして持つシステム方程式を、変分原理によって導出する方法である。実用的な汎用プログラムの作成の容易さや、媒質の非線形性に対する適応性の良さ等から、要素に三角形、三次元問題では四面体を採用し、基底関数に一次関数を用いたものが多く使われる。他方、有限要素法の持つ欠点として、高精度な解を得ようとするれば、必然的にシステム方程式が巨大なものとなることや、本質的に領域型の解法であるため現象が無限遠点に達する問題に直接適用できないこと、さらに、渦電流問題や導波路の固有値問題における非物理的な解であるスプリアスな解の発生等がある。

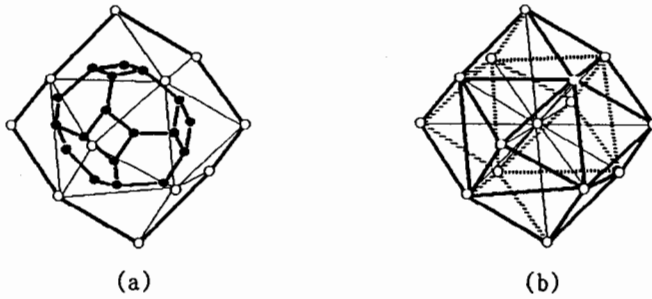
本稿では、筆者等の提唱する Voronoi-Delaunay 線図に基づく幾何学的双対性を用いた新しい離散化で、従来の有限要素法では巨大なシステム方程式を必要としていた高精度計算が、極めて小規模な計算で可能であることを、いくつかの例を用いて示す。

2. 電磁界の高速計算法

2. 1. Voronoi-Delaunay の線図

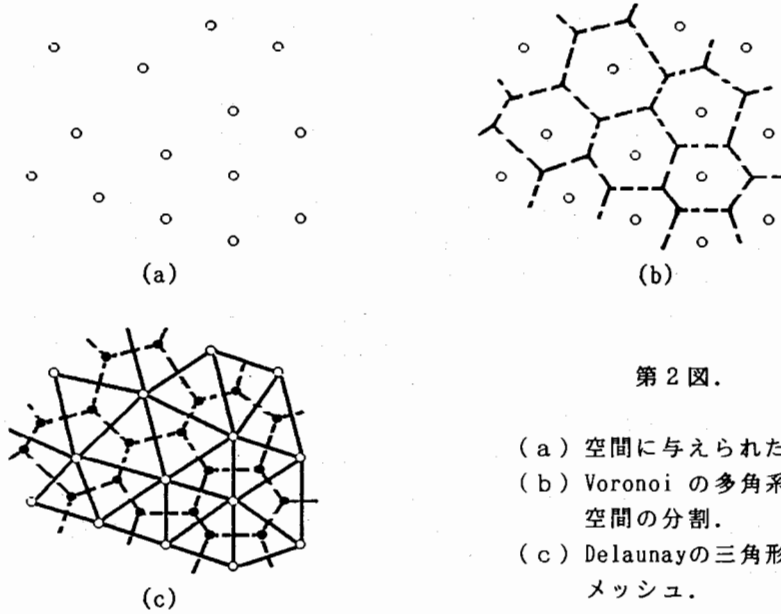
ある空間に節点を与えられたとき、各節点に空間を割り振ると、空間は各節点を取り囲む凸多面体によって分割される。この多面体を Voronoi の多面体と呼ぶ(第1(a)図参照)。Voronoi の多面体の各面が互いに接している節点を結ぶことによって、第1(b)図に示すような四面体で分割される。この四面体を Delaunay の四面体と呼ぶ。Voronoi の多面体と Delaunay の四面体の関係は Voronoi の多面体で空間が分割されたとき自動的に Delaunay の四面体の分割も決定されるだけでなく、Delaunay の四面体の外心が常に Voronoi の多面体の頂点になることである。二次元空間においても同様に、空間に節点を与えられたとき、各節点に空間を割り振ると、第2(a)図に示すように多角形が形成される。この多角形を Voronoi の多角形という。Voronoi の多角形の辺を垂直に分割する線分で各節点を結ぶと、第2(c)図に示すように三角形メッシュが形成される。この三角形を Delaunay の三角形という。三次元空間の場合と同様に、Voronoi

の多角形が形成されると自動的に Delaunayの三角形が形成されるだけでなく、Voronoiの多角形の頂点は Delaunay の三角形の外心に常に位置する関係がある。



第1図.

- (a) Voronoi の多面体.
- (b) Delaunay の四面体.



第2図.

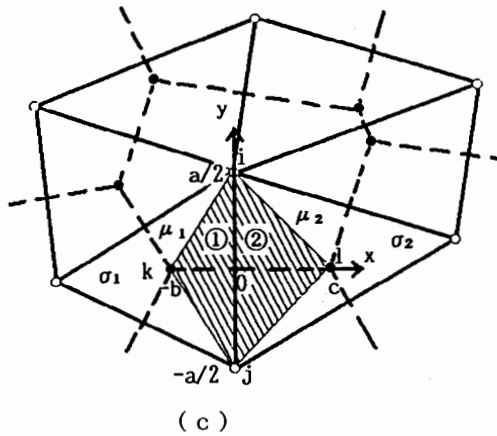
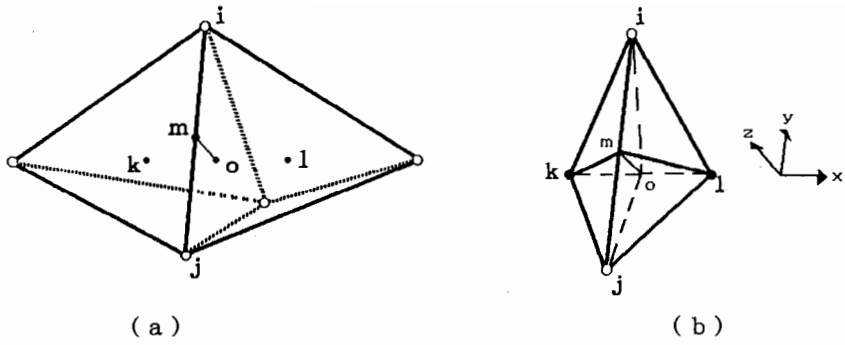
- (a) 空間に与えられた節点.
- (b) Voronoi の多角系による空間の分割.
- (c) Delaunayの三角形によるメッシュ.

2. 2. 局所直交座標系

第3(a)図に示すような Delaunay の四面体が隣接する部分を考えよう。このとき、四面体の接している三角面の外心 o を通る Voronoiの多面体の辺 $k-l$ と Delaunay の四面体の辺 $i-j$ および線分 $i-j$ の midpoint m から三角面の外心 o に下ろした線分 $m-o$ は、第3(b)図に示すように局所直交座標系を形成する。同様に、二次元空間においても第3(c)図に示すように Voronoiの多角形の辺 $k-l$ とDelaunayの三角形の辺 $i-j$ は局所直交座標系を形成する。

第3(c)図の二次元局所直交座標系で、斜線部で囲まれた領域を要素として空間を埋めることを考えよう。

節点は、Delaunay系の節点 i, j と Voronoi系の節点 k, l であるから、各節点におけるポテンシャルを $\phi_i, \phi_j, \phi_k, \phi_l$ とすれば、斜線部分の任意の点でのポテンシャル ϕ は



○ Delaunay系の節点
● Voronoi系の節点

第3図.

- (a) 隣接する四面体.
 (b) 局所直交座標系.
 (c) 二次元空間のVoronoi-Delaunay線図と局所直交座標系.

$$\phi = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 x y, \quad (1)$$

で与えられる。節点 i, j, k, l では (1) 式は各節点ポテンシャルに等しくなければならないから、

$$\begin{bmatrix} \phi_i \\ \phi_j \\ \phi_k \\ \phi_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a/2 & 0 \\ 1 & 0 & -a/2 & 0 \\ 1 & -b & 0 & 0 \\ 1 & c & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, \quad (2)$$

が成り立つ。(2)式の行列は明らかに特異行列である。これは、Voronoi系(x方向)とDelaunay系(y方向)がそれぞれ独立な補間関数を持たなければならないことを意味する。

2. 3. 双対性

Voronoi-Delaunay線図の形成する局所直交座標系において、Voronoi-Delaunay系はそれぞれ独立な補間関数、すなわち解の近似を行わなければならないことが示された。このとき、単純に両者の補間関数をLagrange型の内挿公式で導くのではなく、物理的に互いに双対な関係を満足させるような補間関数を考える。

いま、磁界系を考え、第3(c)図のx-y平面に垂直な方向(z-方向)に磁界Hが加わって

いるとしよう。 節点 i, j, k, l における磁界をそれぞれ H_i, H_j, H_k, H_l とすれば、節点 $i-j$ 間を線形補間する式

$$H_D = \frac{1}{2} (H_i + H_j) + \frac{1}{a} (H_i - H_j) y, \quad (3)$$

は、常に x 方向の電流密度

$$J_x = \partial H_D / \partial y = \frac{1}{a} (H_i - H_j), \quad (4)$$

の連続性を満足する。 他方、節点 $k-l$ 間を線形補間する

$$H_U = [(\sigma_1/b) H_k + (\sigma_2/c) H_l] / [(\sigma_1/b) + (\sigma_2/c)] + (H_l - H_k) (\sigma_x / bc) / [(\sigma_1/b) + (\sigma_2/c)], \quad (5)$$

但し、抵抗率 σ は、 $-b \leq x \leq 0$ で $\sigma = \sigma_2$, $0 \leq x \leq c$ で $\sigma = \sigma_1$ とする。

は、常に y 方向の電界

$$E_y = -\sigma (\partial H_U / \partial x) = (H_l - H_k) / [(b/\sigma_1) + (c/\sigma_2)], \quad (6)$$

を第3(c)図の左側領域①と右側領域②で共通とする。次に、(4)式による電力を第3(c)図の斜線部分について求めてみると、

$$P_D = \int_{-b}^c \int_{-a/2}^{a/2} (1/2) \sigma J_x^2 dx dy = \frac{1}{2} (r_{bp} + r_{cp}) (i_i - i_j)^2, \quad (7)$$

$$\text{但し、} \begin{cases} r_{bp} = \sigma_1 \frac{b}{a \Delta z}, & r_{cp} = \sigma_2 \frac{c}{a \Delta z}, \\ i_i = H_i \Delta z, & i_j = H_j \Delta z, \end{cases} \quad \Delta z : z \text{ 方向の長さ}$$

となる。 他方、(6)式による電力を第3(c)図の斜線部について求めてみると、

$$P_U = \int_{-b}^c \int_{-a/2}^{a/2} (1/2) \frac{1}{\sigma} E_y^2 dx dy = \frac{1}{2} \frac{(i_k - i_l)^2}{\left(\frac{1}{r_{bc}} + \frac{1}{r_{cc}}\right)}, \quad (8)$$

$$\text{但し、} \begin{cases} r_{bc} = \sigma_1 \frac{a}{b \Delta z}, & r_{cc} = \sigma_2 \frac{a}{c \Delta z}, \\ i_k = H_k \Delta z, & i_l = H_l \Delta z, \end{cases} \quad \Delta z : z \text{ 方向の長さ}$$

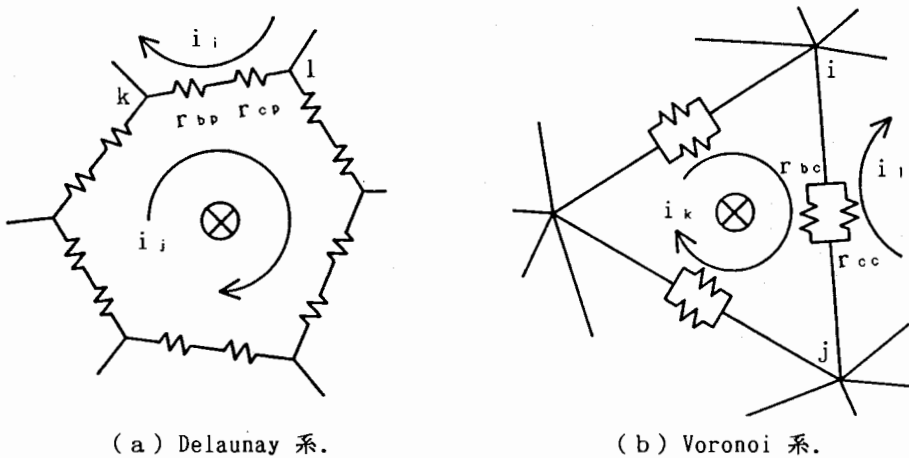
となる。

(7)式の結果で、節点 $i-j$ 間の幾何学的形状と媒質で決まるパラメータは、電気抵抗 r_{bp} と r_{cp} の直列回路になる。 他方(8)式の結果で、節点 $k-l$ 間のパラメータは、電気抵抗 r_{bc} と r_{cc} の並列回路となる。 これは、Delaunay系 $i-j$ 間のパラメータは第3(c)図の領域①から領域②への電流密度 J_x を連続にする条件で導かれるのに対し、Voronoi系 $k-l$ 間のパラメータ

は領域①と領域②間で電界 E_y を共通にする条件で導かれているためである。また、第3(c)図の斜線部で領域①と領域②の媒質のパラメータが等しく $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ として、 $i-j$ 間と $k-l$ 間の抵抗の積を考えると、

$$(r_{bp} + r_{cp}) \frac{1}{\frac{1}{r_{bc}} + \frac{1}{r_{cc}}} = \left(\frac{\sigma b}{a \Delta z} + \frac{\sigma c}{a \Delta z} \right) \frac{1}{\frac{b \Delta z}{\sigma a} + \frac{c \Delta z}{\sigma a}} = \left(\frac{\sigma}{\Delta z} \right)^2, \quad (9)$$

の関係を得る。(9)式は、Voronoi-Delaunay線図に無関係に両者の節点間パラメータの積が一定値をとることを意味する。これが、Voronoi-Delaunay離散化法の双対性である。また、第4図に示すように、Delaunay系の等価回路は、Voronoiの多角形の辺に沿った抵抗の直列回路になるのに対し、Voronoi系の等価回路はDelaunayの三角形の辺に沿った抵抗の並列回路となることからDelaunay系とVoronoi系の双対性がわかる。



第4図. 等価回路.

2.4. Voronoi-Delaunay 変換

(9)式で示したように、空間の媒質がすべて同じであるならば、Voronoi系とDelaunay系の等価回路のパラメータの積は一定の値となる。これは、Voronoi系の等価回路パラメータが与えられたとき、Delaunay系の等価回路パラメータが得られることを意味する。換言すれば、Voronoi系の解からDelaunay系の解が得られることを意味する。このようなVoronoi系の解からDelaunay系の解を得る方法をVoronoi-Delaunay変換法という。この方法を用いれば、Voronoi系とDelaunay系を別々に解く必要はなく、Voronoi系のみを解けばよい。空間の離散化がVoronoiの多面体もしくは多角形によって行われた後、Delaunayの四面体もしくは三角形が決まるため、通常Voronoi系の解からDelaunay系の解が得られ、逆はできない。

Voronoi系の解からDelaunay系の解を得る変換行列は、Delaunayの四面体もしくは三角形の頂点でラプラスの方程式をVoronoi系の解ベクトルを用いて満足させるように離散化することで得られる。これは、Voronoi系からDelaunay系の変換は、既にVoronoi系で離散化された空間で行なわれるため、Delaunay系の節点を支配する方程式は必然的にラプラスの方程式となるためである。

2.5. 例題

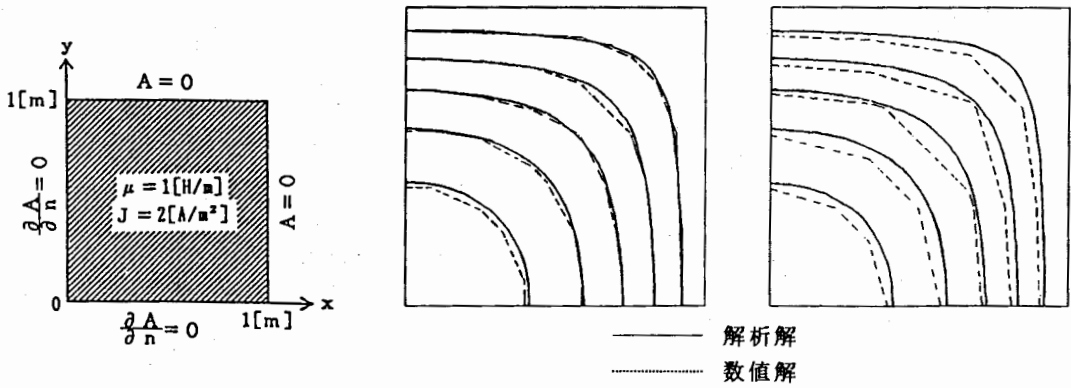
(a) 二次元静磁界問題

第5(a)図に示すような正方形高透磁率材料に電流密度 J が z -方向に流れている場合の磁界分布を求めてみよう。

この系の支配方程式は、

$$\nabla \times \frac{1}{\mu} \nabla \times A = J, \quad (10)$$

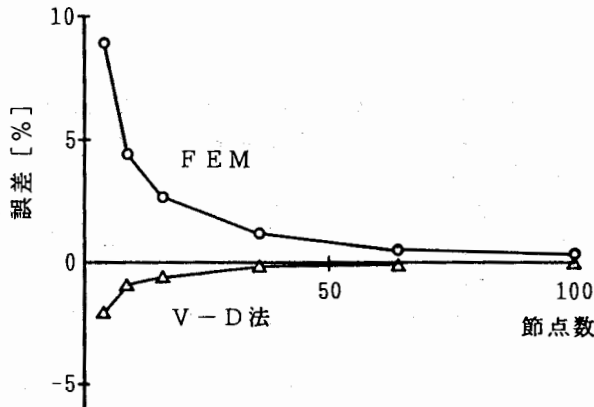
で与えられる。ここで、 μ 、 A 、 J はそれぞれ透磁率、ベクトルポテンシャルおよび電流密度である。この例では、Delaunay系は要素間の法線方向の磁束密度を連続とし、Voronoi系は要素間接線方向の磁界を共通とする。第5(b)-(d)図に計算結果を示す。



(a) 解析モデル.

(b) V-D 法 (9 節点).

(c) FEM (9 節点).



(d) Functional.

第5図.

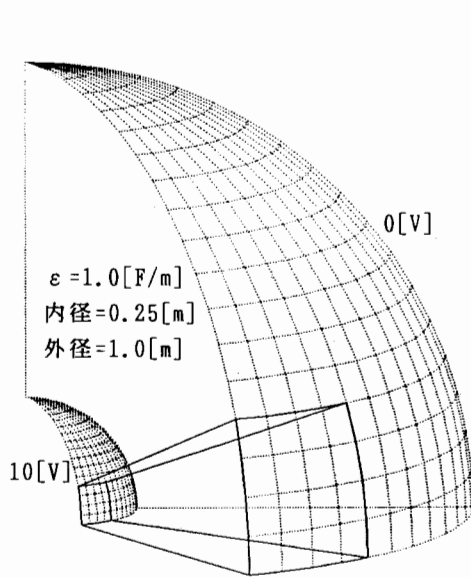
二次元静磁界系の例題.

(b) 三次元静電界問題

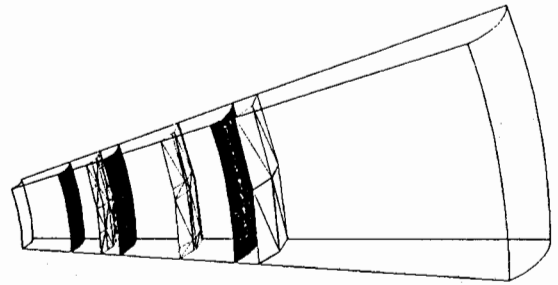
第6(a)図に同心球キャパシターの解析モデルを示す。この例での支配方程式は、

$$\epsilon \nabla^2 U = 0, \quad (11)$$

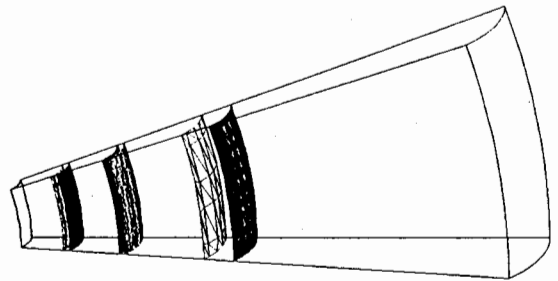
となる。ここで、 ϵ 、 U はそれぞれ導電率とスカラーポテンシャルである。この例では、Delaunay系は要素間の接線方向の電界を共通とし、Voronoi系は要素間に垂直な電束密度を連続とする。第5(b) - (d)図に計算結果を示す。



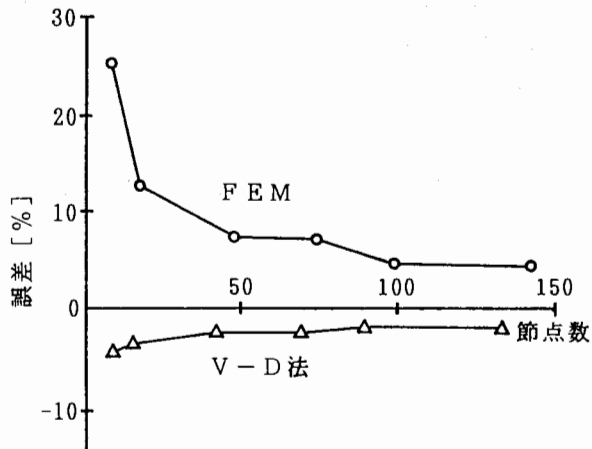
(a) 解析モデル.



(b) 解析解 (■) と FEM (□).



(c) 解析解 (■) と V-D法 (□).



(d) Functional.

第6図.

三次元静電界問題.

3. 結 言

本稿では、電磁界の高速計算を可能とするVoronoi-Delaunay離散化法の概要を紹介した。なお本稿で不十分な点については以下の文献を参照して頂ければ幸いである。

文献[1]は、Voronoi法の基礎について述べてある。[2-4]はVoronoi-Delaunay離散化法の静磁界系について述べてある。[5-7]は、Voronoi-Delaunay法の非線形な動的な系に対する適用法が述べてある。[8]は三次元静電界系について述べてある。[9-11]は、Voronoi-Delaunay線図の性質とその応用例を述べてある。[12-13]は、磁気飽和を呈する系への応用について述べてある。[14-17]は、Voronoi-Delaunay変換法の理論とその応用を述べてある。[18-19]は開領域問題、[20]は固有値問題、[21]は半導体デバイスシミュレーションへの応用が述べてある。

参考文献

- [1] Y.Saito, et al, IEEE Trans. Magn., Vol.MAG-21, No.6, Nov.(1985), pp.2280-2283.
- [2] Y.Saito, et al, IEEE Trans. Magn., Vol.MAG-22, No.5, Sep.(1986), pp.1057-1059.
- [3] 斎藤 他, 電気学会マグネティックス研究会資料, MAG-85-62, 1985年 7月.
- [4] 同上, MAG-85-63, 1985年 7月.
- [5] Y.Saito, et al, J. Appl. Phys., Vol.63, No.8, April(1988), pp.3174-3178.
- [6] 斎藤 他, 電気学会マグネティックス研究会資料, MAG-85-151, 1985年11月.
- [7] 同上, MAG-85-152, 1985年11月.
- [8] 斎藤 他, 電気学会回転機・静止器合同研究会資料, RM-86-51, SA-86-44, 1986年 8月.
- [9] Y.Saito, et al, J. Appl. Phys., Vol.63, No.8, April(1988), pp.3369-3371.
- [10] 斎藤 他, 電気学会マグネティックス研究会資料, MAG-86-112, 1986年10月.
- [11] 同上, MAG-87-71, 1987年 6月.
- [12] Y.Saito, et al, IEEE Trans. Magn., Vol.MAG-24, No.6, Nov.(1988), pp.3138-3140.
- [13] 斎藤 他, 電気学会マグネティックス研究会資料, MAG-87-127, 1987年10月.
- [14] 池口 他, 同上, MAG-88-148, 1988年 8月.
- [15] Y.Saito, et al, Applied Electromagnetics in Materials, (Pergamon Press, Edited by K.Miya) (1989), pp.271-282.
- [16] Y.Saito, et al, Procs. PIERS, (Boston, Massachusetts) July (1989), pp.463-464.
- [17] 池口 他, 電気学会マグネティックス研究会資料, MAG-89-88, 1989年 4月.
- [18] 中沢 他, 同上, MAG-88-171, 1988年10月.
- [19] 中沢 他, 同上, MAG-89-82, 1989年 3月.
- [20] 斎藤 他, 同上, MAG-88-99, 1988年 4月.
- [21] T.Kojima, et al, IEEE Trans. Magn. Vol.MAG-25, No.4, July(1989), pp.2953-2955.