

電磁界系逆問題

- 電流分布推定方法について -

Inverse Problems in Electromagnetic Fields

- Estimation of The Current Distributions -

板垣 英美 , 早野 誠治 , 斎藤 兆古

E. Itagaki , S. Hayano , and Y. Saito

法政大学 工学部

College of Engineering, Hosei University

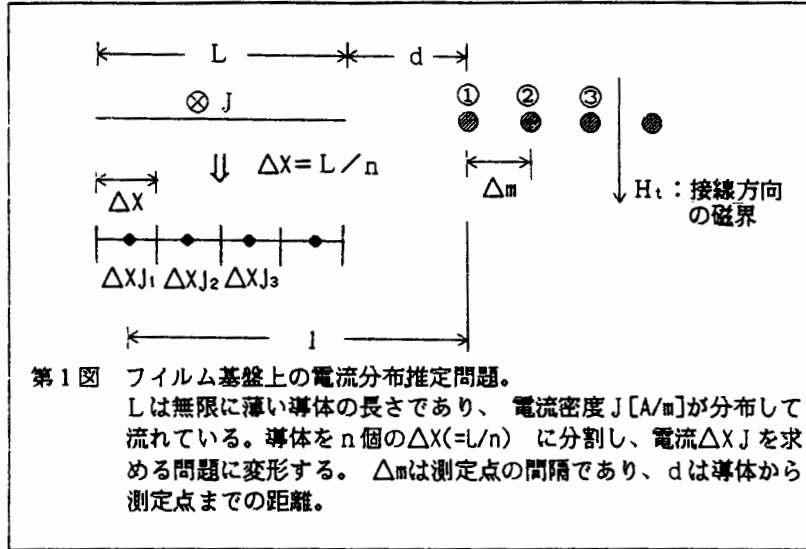
1. まえがき

筆者等は、電流が一樣に分布している導体の断面形状が、周辺磁界の測定によりかなり正確に測定できることを報告した[1]。導体断面形状認識の原理は、測定点における磁界が構成するパターンと仮定した入力点が測定点に与える磁界のパターンとの一致をCauchy-Schwarzの不等式で判定することにある。また、Cauchy-Schwarzの不等式を用いて入力点を求め、入力点の形成する測定点のベクトルに平行なベクトルと外積をとることで、入力電流の大きさを求める方法も提案した[2,3]。しかし、外積をとる方法は、入力点の位置が接近している場合それらの形成するベクトルはほとんど平行となるため、多数の入力点を求めるには不適當であり、データベースを用いた方法であってもせいぜい数個の入力点の大きさを求めるのが限界である。

本稿では、あらかじめ導体の断面形状は既知とし、周辺磁界を測定することにより、導体中の電流分布を推定する問題を考える。電流分布推定の基本問題として、無限に薄い導体（フィルム基盤）の断面に分布する電流を接線方向の磁界を測定することによって推定する問題を取り上げる。一般に逆問題のシステム方程式は、係数行列が正方行列であっても、単純に解くことができない。本稿では、前述の基本問題のシステム方程式の係数行列がVandermonde型の行列となることを示し、その結果、理論上、係数行列の行列式の値は極めて小さいが有限であり、逆問題のシステム方程式は解くことが可能であることを示す。さらに、逆問題のシステム方程式を解く新しい方法について述べる。

2. フィルム基盤上の電流分布推定

2. 1 システム方程式



第1図に示してあるように、導体を n 個に分割し、電流分布の推定を n 個の線電流の大きさを求める問題に変形する。又、測定点の数も分割数 n 等しいとする。ここでは、簡単のため、 $n = 3$ の場合についてシステム方程式を導く。

測定点①、②、③における接線方向の磁界 H_1 、 H_2 、 H_3 は、電流 $\Delta X J_1$ 、 $\Delta X J_2$ 、 $\Delta X J_3$ による接線方向磁界の線形結合で与えられるから、

$$\begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \end{bmatrix} = \frac{\Delta X J_1}{2\pi} \begin{bmatrix} \frac{1}{1} \\ \frac{1}{1 + \Delta m} \\ \frac{1}{1 + 2\Delta m} \end{bmatrix} + \frac{\Delta X J_2}{2\pi} \begin{bmatrix} \frac{1}{1 - \Delta X} \\ \frac{1}{1 + \Delta m - \Delta X} \\ \frac{1}{1 + 2\Delta m - \Delta X} \end{bmatrix} \\
 + \frac{\Delta X J_3}{2\pi} \begin{bmatrix} \frac{1}{1 - 2\Delta X} \\ \frac{1}{1 + \Delta m - 2\Delta X} \\ \frac{1}{1 + 2\Delta m - 2\Delta X} \end{bmatrix}, \quad (1)$$

が成り立つ。(1)式中の ΔX , Δm , l は第1図に示す長さであり、さらに

$$l = \alpha \Delta X \quad , \quad (2a)$$

$$\Delta m = \beta \Delta X \quad , \quad (2b)$$

として、行列形で書き直すと、

$$\begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2\pi} \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha} & \frac{1}{\alpha-1} & \frac{1}{\alpha-2} \\ \frac{1}{\alpha+\beta} & \frac{1}{\alpha+\beta-1} & \frac{1}{\alpha+\beta-2} \\ \frac{1}{\alpha+2\beta} & \frac{1}{\alpha+2\beta-1} & \frac{1}{\alpha+2\beta-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{bmatrix} \quad , \quad (3)$$

となる。次に、次式で与えられるVandermonde型の行列 V と(3)式の係数行列を比較する[4]。

$$V = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_1-b_1} & \frac{1}{a_1-b_2} & \frac{1}{a_1-b_3} \\ \frac{1}{a_2-b_1} & \frac{1}{a_2-b_2} & \frac{1}{a_2-b_3} \\ \frac{1}{a_3-b_1} & \frac{1}{a_3-b_2} & \frac{1}{a_3-b_3} \end{bmatrix} \quad . \quad (4)$$

(4)式で、

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \alpha \quad , & b_1 &= 0 \quad , \\ a_2 &= \alpha + \beta \quad , & b_2 &= 1 \quad , \\ a_3 &= \alpha + 2\beta \quad , & b_3 &= 2 \quad , \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

とおくと、(3)式と一致する。従って、(3)式の係数行列はVandermonde型の行列であることがわかる。(3)式の行列式の値を求めてみると、

$$\Delta = - \frac{4\beta^3}{\alpha(\alpha+\beta)(\alpha+2\beta)(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha+\beta-1)(\alpha+\beta-2)} \times \frac{1}{(\alpha+2\beta-1)(\alpha+2\beta-2)} \quad (6)$$

となる。第1図と(2a)式から、一般に $\alpha > 1$ であり、例えば、 $\Delta X = 3$ [cm]、 $l = 9$ [cm]とすれば、 $\alpha = 3$ となる。又、 β は第1図と(2b)式から、 $\beta \approx 1$ である。例えば、 $\Delta X = \Delta_m$ とすれば $\beta = 1$ となる。この例では、(6)式の行列式の値は $\Delta \approx -0.000463$ となる。このように分割個数が極めて粗い例においても、行列式の値が小さな値となるため、理論上は解けるシステム方程式であるが、ディジタル計算機の有限な精度では単純なガウスの消去法などで解くことは難しい。

2. 2 システム方程式の解法

システム方程式(3)を解き、電流密度 J_1 、 J_2 、 J_3 を求める方法は、直接逆行列を求める方法、解を仮定し反復する方法、さらに、あらかじめ解の形を想定したデータベースを用いて解く方法が考えられる。直接逆行列を求める方法は行列要素間の演算を多数行なうため、行列の要素が極めて近い値をとる逆問題のシステム方程式には適用が難しい。解を仮定し、反復する方法は共役勾配法のようなベクトル演算を多数行なうものと単純に解を反復するSOR法がある。さらに、解の形をあらかじめ想定しておくデータベース的な方法は、解の形が想定できる特定の問題では極めて有効であるが、一般的な場合には巨大なデータベースを必要とする欠点がある[2,3]。以上のことから、反復法が最も逆問題のシステム方程式に対して有効と考えられるが、反復法の中でも、行列の要素が極めて近い値をとる逆問題のシステム方程式においては、可能な限り要素間の演算を少なくするSOR法が望ましい。

さて、SOR法では、係数行列の対角線上の値が非対角線上の要素よりも大きくなければならないから、システム方程式を次のように正規化する。

まず、(3)式を書き直す。

$$\bar{H} = \sum_{i=1}^3 J_i \bar{R}_i \quad (7)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{H} &= [H_1, H_2, H_3]^T, \\ \bar{R}_1 &= (1/2\pi) [1/\alpha, 1/(\alpha+\beta), 1/(\alpha+2\beta)]^T \\ \bar{R}_2 &= (1/2\pi) [1/(\alpha-1), 1/(\alpha+\beta-1), 1/(\alpha+2\beta-1)]^T \\ \bar{R}_3 &= (1/2\pi) [1/(\alpha-2), 1/(\alpha+\beta-2), 1/(\alpha+2\beta-2)]^T \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

次に(7)式を

$$\bar{H} = \sum_{i=1}^3 J_i' \bar{R}_i' \quad (9)$$

$$\left. \begin{aligned} J_i' &= |R_i| J_i \\ \bar{R}_i' &= (1/|R_i|) R_i \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

と変形する。但し、 $| \cdot |$ はノルムを示す。(9)式は、

$$\bar{H} = D \cdot \bar{J}' \quad (11)$$

と書ける。ここで、 D は K_i' を行列要素とする正方行列であり、 \bar{J}' は、 J_i' ($i = 1 \sim 3$)を要素とする列ベクトルである。(11)式の両辺に係数行列 D の転置行列を左から乗算すると、

$$\bar{H}' = D' \cdot \bar{J}' \quad (12)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{H}' &= D' \cdot \bar{H} \\ D' &= D' \cdot D \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

として、正規化されたシステム方程式が得られる。 D' はCauchy-Schwarzの不等式により、対角要素はすべて1の値となり、非対角要素はすべて1以下の値になる。従って、SOR法が適用できる。しかし、実際は、(12)式に直接SOR法を適用すると解が加速係数 ω に依存し、信頼性のある解は期待できない。

このため、(12)式の両辺に任意の重み $\Delta\omega$ を乗算し、変形すると、

$$\Delta\omega \bar{H}' = \Delta\omega D' \bar{J}' \quad (14a)$$

$$= [I + \alpha \Delta\omega D'] \bar{J}' - [I - (1 - \alpha) \Delta\omega D'] \bar{J}' \quad (14b)$$

を得る。ここで α は $0 \leq \alpha \leq 1$ のパラメータであり、 I は3次の単位行列である。いま、上添え字 (K) で K 回目の反復を示すとすれば、(14)式より、

$$\Delta\omega \bar{H}' = [I + \alpha \Delta\omega D'] \bar{J}'^{(K+1)} - [I - (1 - \alpha) \Delta\omega D'] \bar{J}'^{(K)} \quad (15)$$

を得る。変形して、

$$\frac{1}{\Delta\omega} [J'^{(K+1)} - J'^{(K)}] = -D' [\alpha J'^{(K+1)} + (1-\alpha)J'^{(K)}] + H' \quad (16)$$

となる。ここで、 $\Delta\omega \rightarrow 0$ を考えると、

$$\frac{d}{d\omega} J' = -D' J' + H' \quad (17)$$

を得る。よって、(12)式のシステム方程式を解き、 J' を求めることは、(17)式の初期値問題を解き、定常値 $J'^{(K+1)} \approx J'^{(K)}$ を求めることと等価である。

いま、(17)式の係数行列 D' を第2図のように分解すると、

$$D' = \begin{array}{|c|} \hline \begin{array}{c} \diagdown \\ 0 \quad A \quad 0 \\ \diagup \end{array} \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \begin{array}{c} \diagdown \\ B \quad 0 \\ \diagup \end{array} \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \begin{array}{c} \diagdown \\ 0 \quad C \\ \diagup \end{array} \\ \hline \end{array}$$

第2図 係数行列 D' の分解。

$$D' = A + B + C \quad (18)$$

であるから(18)式を使って、(17)式を次のように離散化する。

$$\frac{1}{\Delta\omega} [J'^{(K+1)} - J'^{(K)}] = -A J'^{(K+1)} - B J'^{(K+1)} - C J'^{(K)} + H' \quad (19)$$

(19)式から、(K+1)回目の反復解の第1近似 $J'^{(K+1)}$ を

$$J'^{(K+1)} = (I + \Delta\omega A)^{-1} [-\Delta\omega B J'^{(K+1)} + (I - \Delta\omega C) J'^{(K)} + \Delta\omega H'] \quad (20)$$

として得る。(20)式を加速して、(K+1)回目の解 $J'^{(K+1)}$ を

$$J'^{(K+1)} = J'^{(K)} + \omega [J'^{(K+1)} - J'^{(K)}] \quad (21)$$

として求める。 ω は加速係数で、 $1 \leq \omega < 2$ の値である。(21)式に(20)式を代入すると、

$$\left[\frac{1}{\Delta\omega} I + A + \omega B \right] J^{(k+1)} = \left[\frac{1}{\Delta\omega} I + (1-\omega)A - \omega C \right] J^{(k)} + \omega \bar{H} \quad (22)$$

となる。(22)式で $\Delta\omega \rightarrow \infty$ の時、(12)式を直接SOR法で解く場合と一致する[5]。

2.3 例題

第3図で、導体の幅 $L=1.0$ [m]、導体から測定点までの距離 $d=0.1$ [m]、測定点の間隔 $\Delta m=L/\text{分割数 } n$ と設定した例題を考える。

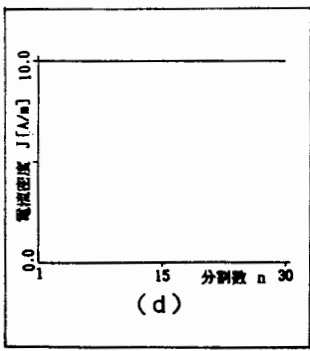
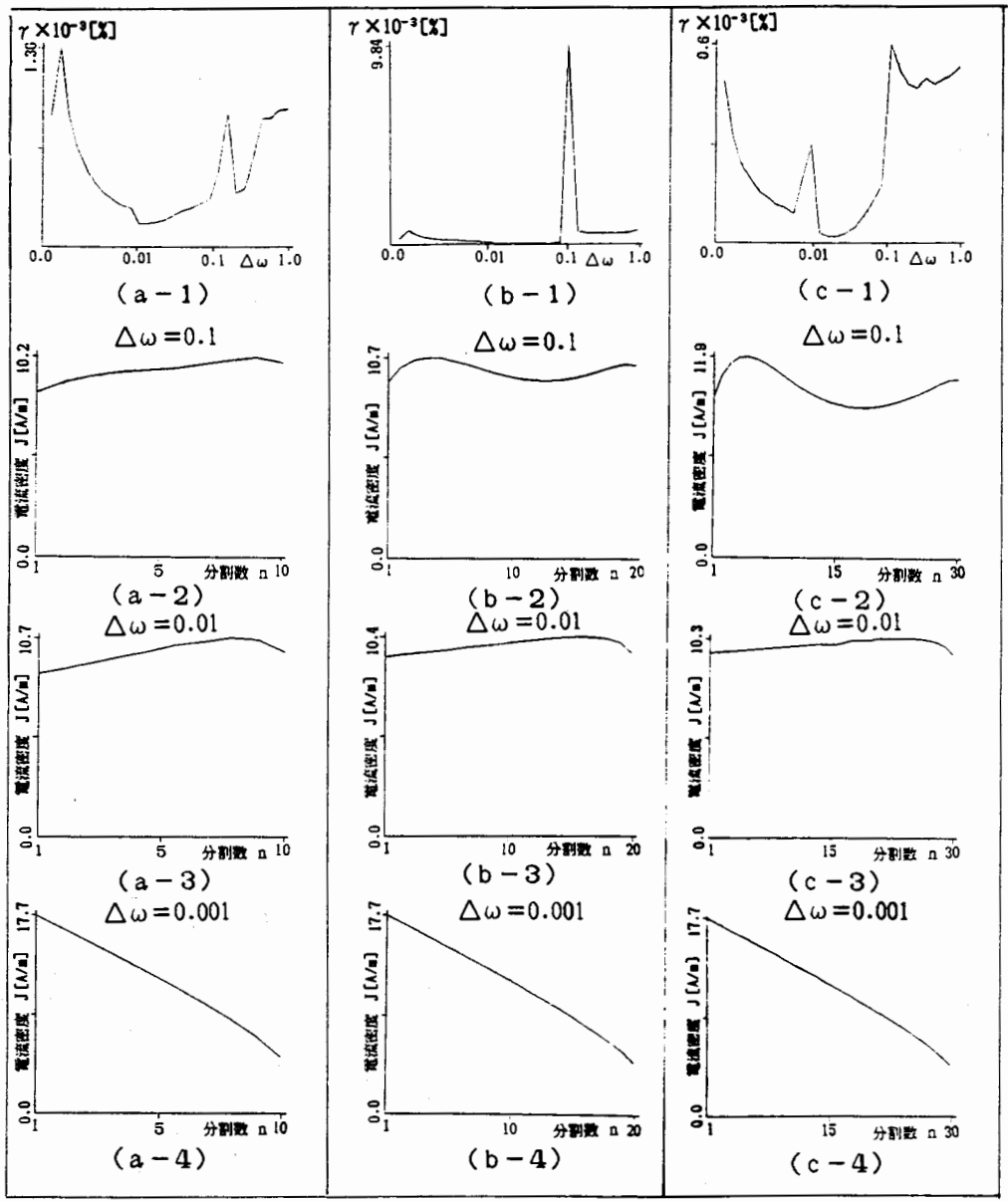
第3図は残差 γ と刻み幅 $\Delta\omega$ の関係を示したものと、刻み幅 $\Delta\omega$ を変化させて、電流密度分布を推定した例を示す。なお、残差 γ は次式で定義した。

$$\gamma = \frac{\left| \sum_{i=1}^n (H_i - H_i')^2 \right|}{\left| \sum_{i=1}^n H_i' \right|} * 100 [\%] \quad (23)$$

- H_i : i 点の位置における既知磁界
- H_i' : 推定した電流による i 点の位置の磁界
- n : 分割数 (= 既知点の数)
- ω : 文献[6]参照

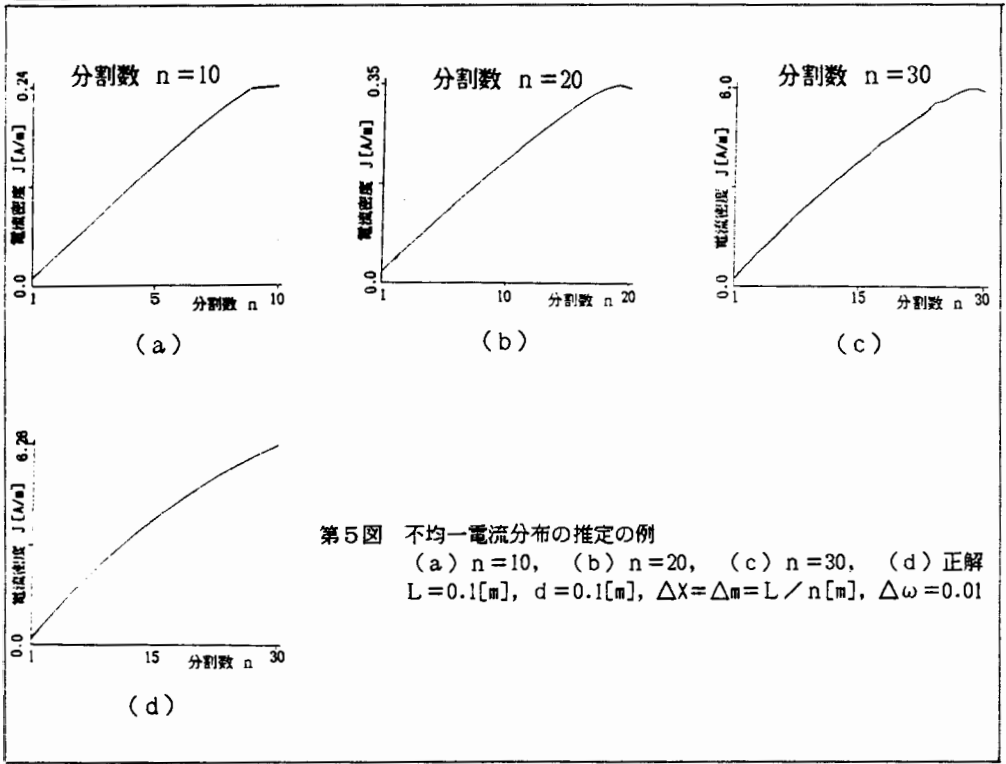
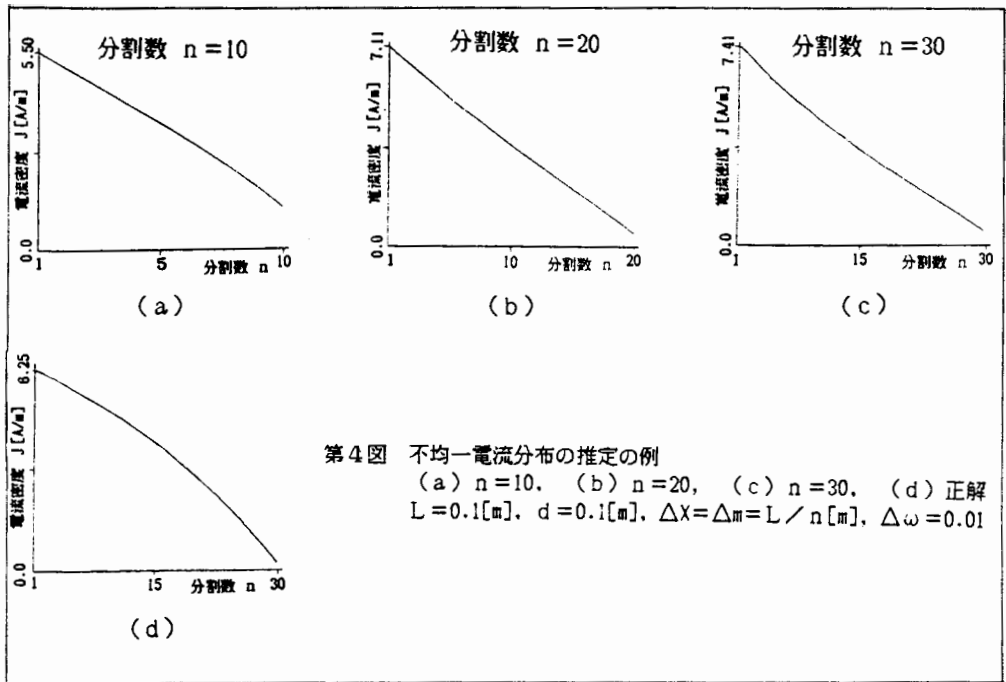
第3(a-1)、(b-1)、(c-1)図の結果から、分割数 $n=10, 20, 30$ 、いずれの場合も $\Delta\omega=0.01$ 近傍で(23)式の残差 γ が最も小さい値となることがわかる。この例題の正解は第3(d)図に示すように、 $J=10$ [A/m]の均一電流分布である。第3図の結果は、 $n=10, 20, 30$ 、のいずれの分割数においても、(23)式の残差 γ が最も小さい $\Delta\omega=0.01$ で、第3(d)図に最も近い結果が得られ、分割数 n の増加に比例して良好な結果となることを示している。これは、初期値問題であるから刻み幅 $\Delta\omega$ が小さいほど正確な解となるべきであるが、実際は丸め誤差のために、 $\Delta\omega$ の下限が存在することを意味する。

第4、5図にそれぞれ電流密度分布が不均一な場合について、第3図と同様に分割数 n を10、20、30、と増加し、 $\Delta\omega=0.01$ で計算した例が示してある。第4、5図の結果は、いずれも分割数の増加に比例して良好な結果となっていることがわかる。以上の結果から、電流分布の推定は、 $\Delta\omega$ を変化させて、(23)式の残差 γ が最小となる $\Delta\omega$ を求め、この $\Delta\omega$ を使って電流分布を求めればよいことがわかる。



第3図 残差 γ と刻み幅 $\Delta\omega$ の関係及び分割数の関係
 $L=0.1[\text{m}]$, $d=0.1[\text{m}]$, $\Delta x=\Delta m=L/n[\text{m}]$, $\Delta\omega=0.01$

- (a-1) ~ (a-4) 分割数 $n=10$
- (b-1) ~ (b-4) 分割数 $n=20$
- (c-1) ~ (c-4) 分割数 $n=30$
- (d) 正解



3. 結言

本稿では、周辺磁界の測定から、導体中の電流分布を推定する逆問題について検討した。その結果、電流分布を求める逆問題のシステム方程式は、単純な方法では容易に解けないが、理論上は解けるシステム方程式であることを示した。逆問題のシステム方程式を解く方法として、システム方程式を初期値問題の方程式に変形して、SOR法で解く方法を提案し、初期数値実験の例として、フィルム基盤上の電流分布推定問題を取り上げ、本稿で提案した方法が有効であることを示した。

参考文献

- [1] 斎藤 兆古・他, "静的電磁界系における導体形状認識", 日本シミュレーション学会, 第11回計算電気・電子工学シンポジウム, 1990年3月, 1-11, pp.83-88
- [2] Y.Saito, et al, "A Formulation of The Inverse Problems in Magnetostatic Fileds and Its Application to a Source Position Searching of The Human Eye Fields," J.Appl.phys.67(9), 1May1990.
- [3] 板垣 英美 他, "電磁界系の逆問題-静的電磁界系に対するパターンマッチング法の提案-", "電気学会マグネティックス研究会資料, MAG-89-163.
- [4] 藤原 松三郎, 行列及び行列式, 岩波全書, 1973年11月.
- [5] R.S.Varga, Matrix Iterative Analysis, (Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, N.J.1962).
- [6] Y.Saito, "Three-dimensional Analysis of Nonlinear Magnetostatic Fields in a Saturable Reactor," Comp.Meths, Appl, Mech, Eng. Vol.161, Oct(1978)pp.101-115.