

有限要素法による非線形静磁界分布算定への一反復解法

An Iterative Method for the FEM Solutions
of Nonlinear Magnetostatic Fields

斎藤 兆古, 池口 修一, 早野 誠治
Y.Saito, S.Ikeguchi and S.Hayano

法 政 大 学 工 学 部
College of Engineering, Hosei University

1. まえがき

Silvester 等によって、磁気飽和を有する系に有限要素法が適用されて以来、有限要素法は極めて広範に磁気装置の磁界分布算定に使われるようになった[1]。磁気装置を構成する磁性材料は、多かれ少なかれ非線形の磁化特性を有し、厳密な磁界分布を算定するためには必然的にこれらの非線形性を考慮しなければならない。磁気装置の磁界分布を解析するとき、多くの場合第1近似として磁気飽和特性のみ考慮して算定される。これは、磁気ヒステリシスやうず電流を考慮した解析が、磁気飽和特性に比較して、極めて複雑で膨大な計算時間を必要とするためである[2, 3]。

磁気装置の磁界分布を磁気飽和を考慮した算定方法として、Newton-Raphson法またはこれを変形した方法が広範に使われている[4, 5]。しかし、磁気飽和が著しい場合、必ずしも解が収束しないこともある。このため、解の収束が保証される絶対安定な反復解法が望まれている。

本稿では、有限要素法で非線形静磁界分布を算定する場合に1回だけの逆行行列計算で、その後は単純な反復だけで逆行行列を供なわない有限要素法の定式化方法を提案する。この反復解法は、磁気飽和が著しい程安定で高速に収束する方法であることを示し、従来のNewton-Raphson法との関係も合わせて報告する。

2. 基礎方程式

磁界 H と電流密度 J_s の間には次の関係がある。

$$\nabla \times H = J_s \quad (1)$$

また、磁性体では、磁束密度 B と磁界 H および磁化 M の間には次の関係がある。

$$B = \mu_0 (H + M) \quad (2)$$

ここで、 μ_0 は真空中の透磁率であり、また磁化 M は真空中では零となる。

(2)式は,

$$\begin{aligned} B &= (\mu_0 + \chi_m) H , \\ &= \mu_0 \left(1 + \frac{\chi_m}{\mu_0} \right) H , \\ &= \mu_0 \mu_r H , \\ &= \mu H , \end{aligned} \quad (3)$$

とも表せる。ここで、 χ_m は磁化率、 μ_r は比透磁率、 μ は透磁率である。さて、磁束密度 B の発散は常に零であるから、ベクトルポテンシャル A を用いて、

$$B = \nabla \times A , \quad (4)$$

とすれば、 $\nabla \cdot B = 0$ の条件が自動的に満足される。(4)式を(2)式に代入し、さらに(1)式の関係から、

$$\begin{aligned} \nabla \times \frac{1}{\mu_0} \nabla \times A &= \nabla \times H + \nabla \times \frac{1}{\mu_0} M \\ &= J_s + J_i , \end{aligned} \quad (5)$$

の関係を導くことができる。ここで、

$$J_i = \nabla \times \frac{1}{\mu_0} M , \quad (6)$$

は磁性体中の等価電流密度である。さらに、次式のCoulomb Gauge ,

$$\nabla \cdot A = 0 , \quad (7)$$

を仮定すれば、(5)式は次式のように書ける。

$$\frac{1}{\mu_0} \nabla^2 A = -J_s - J_i . \quad (8)$$

また、(1)式、(3)式、(4)式および(7)式から次の関係も導くことができる。

$$-\frac{1}{\mu} \nabla^2 A = -J_s . \quad (9)$$

(8)式と(9)式から、(6)式の等価電流密度 J_i は、

$$-J_i = \frac{1}{\mu_0} \nabla^2 A - \frac{1}{\mu} \nabla^2 A , \quad (10)$$

として表される。

3. 有限要素法による非線形磁界計算

3. 1. システム方程式

(8)式により支配される空間に有限要素法を用いて、離散化して得られるシステム方程式は、

$$C_0 X = F_s + F_i \quad , \quad (11)$$

と書ける。ここで、 C_0 は係数行列、 X は節点ポテンシャルからなる解ベクトル、 F_s は印加電流密度 J_s による入力ベクトル、さらに F_i は磁性体中の等価電流密度 J_i による入力ベクトルである。この入力ベクトル F_i は(10)式を有限要素法で離散化して次式より求められる。

$$F_i = [C_0 - C] X \quad . \quad (12)$$

ここで、 C は、 C_0 で真空中の透磁率 μ_0 を透磁率 μ で置き換えた係数行列である。(11)式の F_i に(12)式を代入して、解くべきシステム方程式、

$$C_0 X = [C_0 - C] X + F_s \quad , \quad (13)$$

を得る。

3. 2. 反復解法

磁性体中の透磁率 μ が一定で、解ベクトル X に依存しない場合、(13)式は、

$$C X = F_s \quad , \quad (14)$$

と変形できる。(14)式は(9)式を有限要素法で離散化したものと一致する。(14)式の両辺に、係数行列 C の逆行列を掛算すると、

$$X = C^{-1} F_s \quad , \quad (15)$$

として、解ベクトル X が求められる。しかし、透磁率 μ が解ベクトル X に依存する非線形の場合は、

$$X^{(n+1)} = C(X^{(n)})^{-1} F_s \quad , \quad (16)$$

の計算を行ない、 $n+1$ 回目の解ベクトル $X^{(n+1)}$ が n 回目の解ベクトル $X^{(n)}$ と一致するまで反復して計算を行なう。ここで、 $C(X^{(n)})$ は係数行列 C が n 回目の解ベクトル $X^{(n)}$ の関数であることを意味する。(16)式の方法は、

従来の単純反復による非線形磁界計算法であり、反復毎に係数行列Cの逆行列を必要とする。また、Newton-Raphson法による反復計算でも、各反復毎に係数行列Cの解に対する変化率、すなわちJacobian行列の逆行列計算が必要である。

一方、筆者等の提案する方法は、(13)式を次式のように、

$$X^{(n+1)} = C_0^{-1} \{ [C_0 - C(X^{(n)})] X^{(n)} + F_s \} \quad , \quad (17)$$

反復計算する。(17)式で、 C_0 は真空中の透磁率 μ_0 のみに依存するために、常に一定値からなる行列であり、従って、係数行列 C_0 の逆行列計算は最初の1回だけであり、2回目以降は単純な代入計算のみとなる。

3. 3. 安定性

(17)式を変形して、

$$X^{(n+1)} = [I - C_0^{-1}C(X^{(n)})] X^{(n)} + X_0 \quad , \quad (18)$$

を考える。ここで、

$$X_0 = C_0^{-1}F_s \quad , \quad (19)$$

であり、磁性材料が存在しない場合の解ベクトルである。またIは、

$$I = C_0^{-1}C_0 \quad , \quad (20)$$

となる単位行列である。

(18)式を次式のように書くとすれば、

$$X^{(n+1)} = S(X^{(n)}) X^{(n)} + X_0 \quad , \quad (21)$$

となり、 $S(X^{(n)})$ を状態遷移行列(State Transition Matrix)と呼び、次式で与えられる。

$$S(X^{(n)}) = I - C_0^{-1}C(X^{(n)}) \quad . \quad (22)$$

一般に、状態遷移行列の最大固有値が1より小さいとき、無条件に安定であり、1より大きいとき不安定な解法として知られている[6]。磁気飽和を有する系で、磁性材料が完全に飽和したとき、(3)式で磁化率 χ_m は零となり、従って、透磁率 μ は真空中の透磁率 μ_0 に等しくなる。このとき、(22)式の状態遷移行列は零行列となり、よって最大固有値も零となり、(17)式の反復法は、無条件に安定な解法であることが保証される。

3. 4. 収束性

(17)式で、第 $(n+1)$ 回目と第 (n) 回目の解ベクトルが一致したとすれば、(17)式は、

$$X^{(n)} = C(X^{(n)})^{-1} F_s \quad , \quad (23)$$

となり、この式は(16)式で、 $X^{(n+1)} = X^{(n)}$ としたものと一致する。従って、磁化ベクトル M を等価電流密度 J_i に置き換えた(5)式と、磁化ベクトル M を透磁率 μ に含めた従来の方法、すなわち(9)式によるそれぞれの結果は同一の解ベクトルに収束する。

次に、(17)式又は(21)式の反復法の収束過程を吟味する。(21)式の反復法は、

$$\begin{aligned} X^{(n+1)} &= [I + S(X^{(1)}) \cdots S(X^{(n-1)}) S(X^{(n)}) \\ &\quad + S(X^{(2)}) \cdots S(X^{(n-1)}) S(X^{(n)}) \\ &\quad + \cdots \cdots + S(X^{(n)})] X_0 \quad , \\ &= [I + \sum_{k=1}^n \prod_k^n S(X^{(k)})] X_0 \quad , \end{aligned} \quad (24)$$

と計算を行なっている。簡単のため、(24)式で S を線形の場合について考えると、(24)式は、

$$\begin{aligned} X^{(n+1)} &= [I + \sum_{k=1}^n S^k] X_0 \quad , \\ &= [I + \sum_{k=1}^n S^k] C_0^{-1} F_s \quad , \end{aligned} \quad (25)$$

となる。ここで、状態遷移行列 S は(22)式より、

$$S = I - C_0^{-1} C \quad , \quad (26)$$

で定義される定数行列である。(26)式を(25)式に代入して、 n が充分大きいとすれば、

$$\begin{aligned} X^{(n+1)} &= [I + \sum_{k=1}^n (I - C_0^{-1} C)^k] C_0^{-1} F_s \quad , \\ &\doteq \{ C_0 [I - (I - C_0^{-1} C)] \}^{-1} F_s \quad , \\ &= \{ C_0 - (C_0 - C) \}^{-1} F_s \quad , \\ &= C^{-1} F_s \quad , \end{aligned} \quad (27)$$

となっていることがわかる。(24)–(27)式の結果から、(17)式又は(21)式の反復法は、逆行列の計算と非線形の反復計算を平行して進める過程であることがわかる。

さらにNewton-Raphson法との関係調べてみる。(17)式を変形して、

$$C_0 [X^{(n+1)} - X^{(n)}] = - [C(X^{(n)}) X^{(n)} - F_s], \quad (28)$$

の関係を得る。いま、ある任意の関数 $f(x)$ で、ベクトル x が Δx だけ変化したとき、

$$f(x + \Delta x) \doteq 0, \quad (29)$$

であるとすれば、

$$f(x + \Delta x) \doteq f(x) + \frac{\partial f(x)}{\partial x} \Delta x \doteq 0, \quad (30)$$

であるから、

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} \Delta x \doteq -f(x), \quad (31)$$

が成り立つ。(28)式と(31)式の辺々を比較すれば、

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = C_0, \quad (32a)$$

$$\Delta x = X^{(n+1)} - X^{(n)}, \quad (32b)$$

$$f(x) = C(X^{(n)}) X^{(n)} - F_s, \quad (32c)$$

と対応していることがわかる。したがって、(17)式又は(21)式 of 非線形反復過程は、Newton-Raphson法におけるJacobian行列を(32a)式に示すように C_0 で近似したものに对应していることがわかる。

3. 5. 一般化

(17)式の反復法は、(14)式を次の様に変形していることに对应する。

$$C = C_0 - (C_0 - C), \quad (33a)$$

$$C_0 X^{(n+1)} - [C_0 - C(X^{(n)})] X^{(n)} = F_s. \quad (33b)$$

従って、(33a)式の係数行列の分割で、任意の透磁率 μ_a が構成する係数行列 C_a を C_0 の替わりに使うと、(33a)と(33b)式は、次の様になる。

$$C = C_a - (C_a - C), \quad (34a)$$

$$C_a X^{(n+1)} - [C_a - C(X^{(n)})] X^{(n)} = F_s \quad (34b)$$

よって、(34b)式より、(17)式の反復法は次の様に一般化される。

$$X^{(n+1)} = C_a^{-1} \{ [C_a - C(X^{(n)})] X^{(n)} \} + F_s \quad (35)$$

(35)式で、 C_a すなわち透磁率 μ_a の選択によって、収束性は改善される場合もあるが、磁気飽和が著しい場合、その収束性は保証されない。絶対の収束性が保証される場合は、 $C_a = C_0$ となる(17)式の場合だけである。

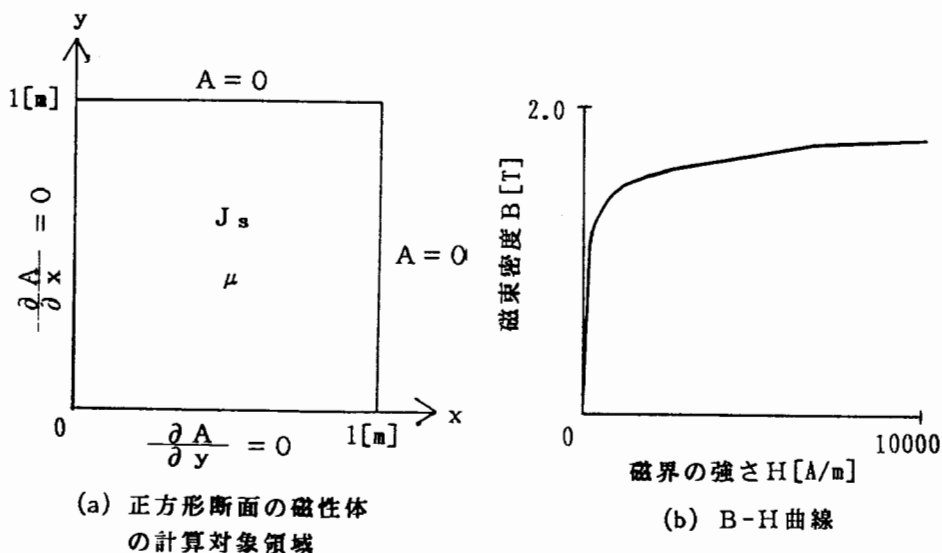
3. 6. 例題

具体的な例題として、正方形断面の磁性体中における磁界計算を取り上げる。対称性から第1(a)図に示した1/4を計算対象とした。この磁性体のB-H曲線を第1(b)図に示す。第2図に、異なった印加電流密度 J_s における反復法の収束過程を示す。ここで、誤差 ϵ は次式で定義される。

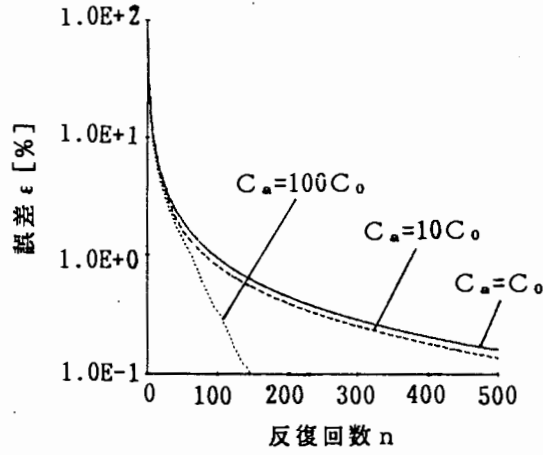
$$\epsilon = \left| \frac{X^{(n+1)} - X^{(n)}}{X^{(n+1)}} \right| \times 100 \quad (36)$$

第2図の結果から、(35)式で係数行列 $C_a = C_0$ とした反復解法は、絶対安定な解法であり、磁気飽和が著しい程高速に解が収束する。(35)式で係数行列 C_a に依存する反復解法の場合、計算速度は加速されるが、解の安定性は、保証されないことは明らかである。

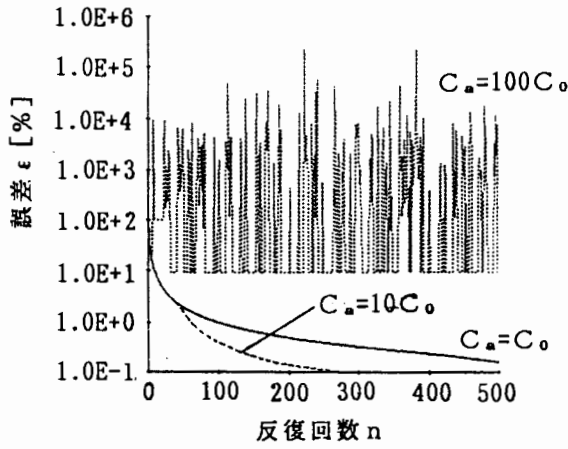
第3図は、おのおの異なった印加電流密度 J_s における透磁率分布を示す。



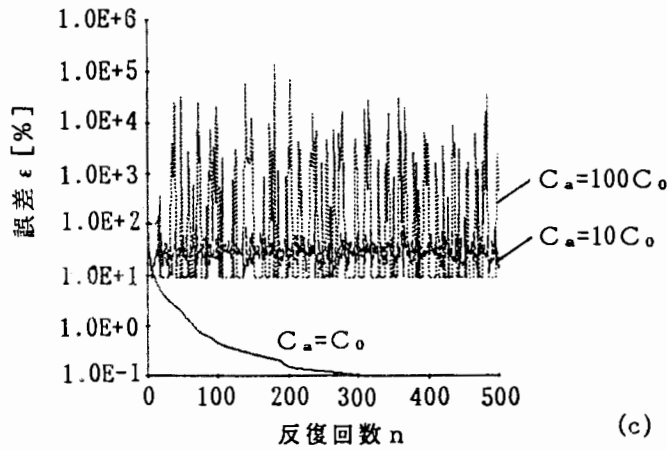
第1図



(a) $J_s = 500 \text{ [A/m}^2\text{]}$

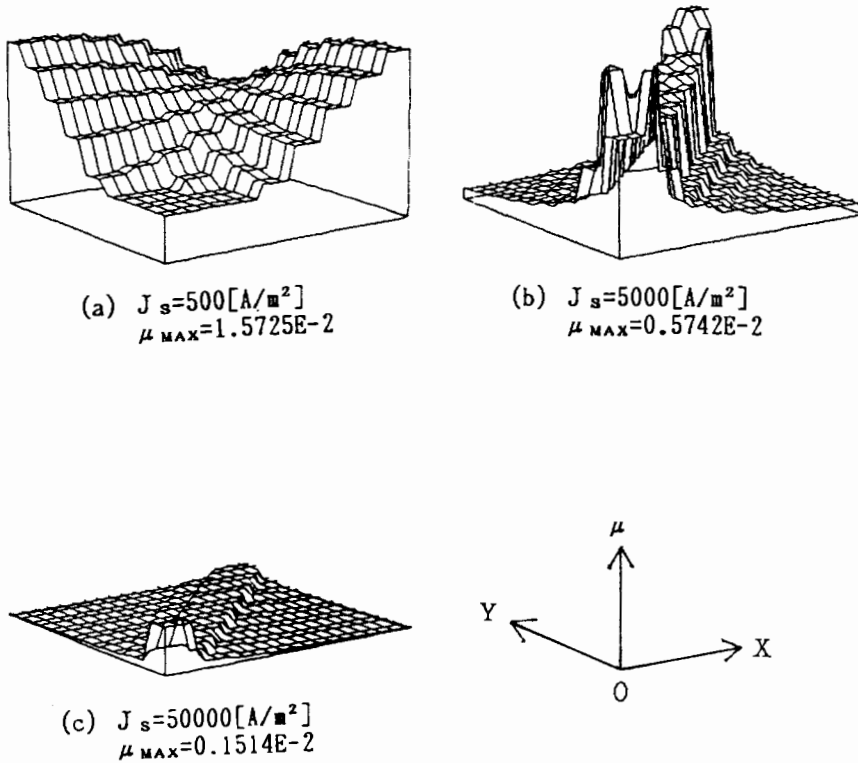


(b) $J_s = 5000 \text{ [A/m}^2\text{]}$



(c) $J_s = 50000 \text{ [A/m}^2\text{]}$

第2図 収束性



第3図 透磁率の分布

4. 結言

磁気飽和を有する系を解く場合の最大の問題点であった反復解法について、自発磁化を利用する新しい反復法を提案し、この方法は磁気飽和が著しい程高速となる解法であり、また反復毎に逆行列計算を必要とせず絶対安定な解が得られることを示した。

参考文献

- [1] P.Silvester and et al, IEEE Trans., Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-89, No.7 (1970) 1642-1651.
- [2] Y.Saito and et al, IEEE Trans., Magnetics, Vol.MAG-25, No.5(1984).
- [3] Y.Saito and et al, IEEE Trans., Magnetics, Vol.MAG-18, No.2(1982).
- [4] M.V.K.Chari and P.P.Silvester, Finite Elements for Electrical and Magnetics Field Problems (Chichester:John Wiley, 1981)
- [5] P.Silvester, IEEE Trans., Power Apparatus and Systems, Vol.PAS-92, No.4 (1973).
- [6] G.D.Smith, Numerical Solution of Partial Differential Equations (Oxford University Press, 1965).