

マグネティックス研究会資料

資料番号

MAG-88-89

## 磁化特性の表現とその集中定数回路への応用

斎藤兆古・並木 勝・早野誠治  
(法政大学)

1988年4月22日

社団法人 電気学会

東京都千代田区有楽町1-12-1

## 磁化特性の表現と その集中定数回路への応用

A Representation of Magnetization Characteristics  
and Its Application to the Lumped Circuits

斎藤 兆古                      並木 勝                      早野 誠治  
Y.Saito,                      M.Namiki      and      S.Hayano

法政大学 工学部

College of Engineering, Hosei University

### 1. まえがき

磁性材料を用いた機器は、磁気記録装置やセンサーなどの主として信号処理を行う機器から発電機や電動機などのエネルギー変換や電力制御に使われる機器まで、極めて広汎な分野にまたがっている。このような磁気装置を設計する場合、主要構成材料である磁性材料の磁化特性を把握し、数式的に表現し設計計算に導入することが必要不可欠である。このことから、磁性材料の磁気飽和特性を表すFrolichの式等が提案されてきた。これらの従来の表現法は、極めて多くの経験的事実に立脚して得られたものであり、過去の多くの磁気装置の設計に重要な役割を果たして来た。しかし、これらの経験式の持つ宿命として、新しい磁性材料の出現の度、常に多くの経験を積む必要があり、また従来の経験式の大部分が定常状態を前提としているのに対し、現代の磁気装置は過渡状態まで含めた精密な設計が要求されている。また、デジタル計算機の処理能力の向上と普及に伴い、有限要素法や有限差分法などの数値解析法を活用して、より精密で最適な設計が実現可能となりつつある。しかし、数値解析による設計でも、その前提となる磁化特性の表現が適切でない限り、その結果としての妥当性がない。従って、従来の経験則でなく、過渡特性まで含めたより精密な磁化特性の表現が必要となっている。

磁化特性を表す方法として、角型の単位ヒステリシスループを組み合わせて磁化特性を表すPreisach型モデルと動的な磁化特性を前提とするChua型モデルがある。多くの磁気装置では、磁界が時間に対して変化する、いわゆる動的な磁界が存在する。このことから、Preisach型モデルは静的な磁化特性を前提としているためPreisach型モデルだけでは不十分である。一方、Chua型モデルは、動的な磁化特性を前提としているため、静的な磁化特性を表現できないことが指摘されている。しかし、静的な磁化状態を無限に遅い動的な磁化状態ともみなし得ることができるから、これまで筆者等は、Chua型の磁化特性モデルを提唱してきた[1, 2]。Chua型モデルはL.O.Chua等が汎用電子回路シミュレーションプログラム作成に当たって、非線形インダクターの特性を表すために提

案した [3]。筆者等は、このプロトタイプ of Chua 型モデルの磁化特性を種々検討した結果、Chua 型モデルは第一近似のモデルとしては極めて良好であり、磁化特性の周波数依存性やマイナーループの再現、更に磁気余効等の特性などを表し得ることを確認した。しかし、Rayleigh ループや磁化反転時における特性などは十分に再現できないことを指摘し、これらの欠点を補う新しい Chua 型モデルを提案した [1-3]。

本稿では、筆者等の提案する新 Chua 型モデルの電気的等価回路と、これを集中定数型回路の計算に応用した例について吟味し、新 Chua 型モデルの妥当性を検証する。

## 2. 磁化特性モデル

### 2. 1 新 Chua 型モデル

磁化特性モデルのパラメータは、磁化特性モデルが結果として磁気履歴特性を呈示するものであるから、磁気履歴特性、すなわち磁気ヒステリシスの影響を含むものであってはならない。磁気飽和特性を表す磁化曲線には、初期磁化曲線、ヒステリシスループの頂点をトレースして得られる正規磁化曲線、さらに各点で交流消磁を行って得られる理想磁化曲線などがある。これらの磁化曲線で、過去の履歴と無関係になるユニークな曲線は理想磁化曲線である。なぜなら、理想磁化曲線は測定時に曲線上の各点で交流消磁を行って過去の磁気履歴を打ち消しているためである。この理想磁化曲線は次の関係によって表されるものとする。

$$H = (1/\mu) B \quad (1)$$

ここで、 $\mu$ 、 $H$ 、 $B$  はそれぞれ透磁率、磁界、磁束密度とする。(1) 式の理想磁化曲線は、 $B-H$  線図上の原点からの特性を表すから、磁化曲線上での微小変化を表す特性が、全体の磁化特性を表すために必要である。

磁化曲線上での微小変化を表すパラメータとして、可逆透磁率  $\mu_r$  がある。この可逆透磁率  $\mu_r$  は、バイアス磁束密度  $B$  上で、微小磁界  $\Delta H$  の変化に対する磁束密度の変化  $\Delta B$  を考え、微小磁界  $\Delta H$  を零に近づけた場合に得られるパラメータで、

$$\mu_r = \lim_{\Delta H \rightarrow 0} \frac{\Delta B}{\Delta H} \quad (2)$$

で定義される。(2) 式から得られる可逆透磁率  $\mu_r$  は、それ自身が過去の履歴に依存しなくても、バイアス磁束密度  $B$  が過去の履歴に影響される場合には、結果として過去の磁気履歴に依存するパラメータとして採用できない。可逆透

磁率 $\mu_r$ で過去の履歴に無関係にユニークに決まるものは、理想磁化曲線の測定時に得られる可逆透磁率である。これは、理想磁化曲線の測定時に決まるバイアス磁束密度が交流で過去の履歴を打ち消して得られているためである。可逆透磁率は、実質的に微分透磁率に等しいから、

$$\mu_r = \frac{dB}{dH} = (dB/dt) / (dH/dt) , \quad (3)$$

又は、

$$\frac{\mu_r}{s} \frac{dH}{dt} = \frac{1}{s} \frac{dB}{dt} , \quad (4)$$

が成り立つ。ここで、(4)式の $s$ はヒステリシス係数と呼ばれるパラメータで、 $\Omega/m$ の次元を持ち、(4)式の次元を(1)式の磁界 $H$ と同じ次元にするために導入されている[2]。(1)式は、 $B-H$ 線図の原点からの関係を表し、(4)式は理想磁化曲線上の微小変化に対する特性を表す。従って、(1)式と(4)式の辺々の和は全体の磁化特性を表す式となり、

$$H + \frac{\mu_r}{s} \frac{dH}{dt} = \frac{1}{\mu} B + \frac{1}{s} \frac{dB}{dt} , \quad (5)$$

(5)式が筆者等が提唱する新Chua型モデルであり、(5)式で $\mu_r=0$ としたものがプロトタイプのChua型モデルである。

(5)式の新Chua型モデルで、 $s$ 、 $\mu$ 、とさらに $\mu_r$ を一定値とした場合は、ヒステリシスループを楕円近似したモデルとなる[4, 5]。しかし、実際は、これらのパラメータは一定値ではなく、磁束密度 $B$ や磁束密度の時間微分である $dB/dt$ などの関数となったとき、初めて本来の磁化特性を表す。(5)式の透磁率 $\mu$ や可逆透磁率 $\mu_r$ は、その測定法から明らかなように磁束密度 $B$ の一価関数として表され、ヒステリシス係数 $s$ は、(5)式で、 $B=0$ としたとき、

$$H = \frac{1}{s} \left( \frac{dB}{dt} - \mu_r \frac{dH}{dt} \right) , \quad (6)$$

が成り立つため、

$$s = \frac{1}{H} \left( \frac{dB}{dt} - \mu_r \frac{dH}{dt} \right) , \quad (7)$$

として決定される。(5)式で、 $\mu_r$ は磁束密度 $B$ の一価関数であるが、(7)式での $\mu_r$ は $B=0$ の時の値になり、初期透磁率 $\mu_i$ と一致する一定値である。

## 2. 2 集中定数型等価回路

(5)式を使ってトロイダルコアの電氣的等価回路を導くことを考える。トロイダルコアのコイルの抵抗を  $r$ 、断面積を  $A$  さらに平均磁路長を  $l$  とする。電源電圧  $v$  が印加されたとき流れる電流を  $i$  とすれば、(5)式の両辺を磁路長  $l$  について積分すると、

$$\int_0^l H \, dl + \int_0^l \frac{\mu_r}{s} \frac{dH}{dt} \, dl = n i + n \frac{\mu_r}{s} \frac{di}{dt}, \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \int_0^l \frac{1}{\mu} B \, dl + \int_0^l \frac{1}{s} \frac{dB}{dt} \, dl &= \frac{l}{\mu A} \phi + \frac{l}{s A} \frac{d\phi}{dt} \\ &= \frac{1}{L_i} \phi + \frac{1}{R_i} \frac{d\phi}{dt}, \end{aligned} \quad (9)$$

の関係が成り立つ。ここで、 $\phi$ 、 $L_i$ 、 $R_i$  はそれぞれ磁束、コイル1巻当りのインダクタンスと等価抵抗である。印加電圧は  $v$  であるから、電流  $i$  とその時間微分  $di/dt$  は、

$$i = \frac{1}{r} \left( v - n \frac{d\phi}{dt} \right), \quad (10)$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{1}{r} \left( \frac{dv}{dt} - n \frac{d^2\phi}{dt^2} \right), \quad (11)$$

で与えられる。(10)、(11)式を(8)式の対応する項へ代入すれば、(8)式と(9)式は等しいから、

$$\begin{aligned} \frac{n}{r} \left( v + \frac{\mu_r}{s} \frac{dv}{dt} \right) &= \frac{n^2}{r} \frac{\mu_r}{s} \frac{d^2\phi}{dt^2} \\ &+ \left( \frac{n^2}{r} + \frac{1}{R_i} \right) \frac{d\phi}{dt} + \frac{1}{L_i} \phi, \end{aligned} \quad (12)$$

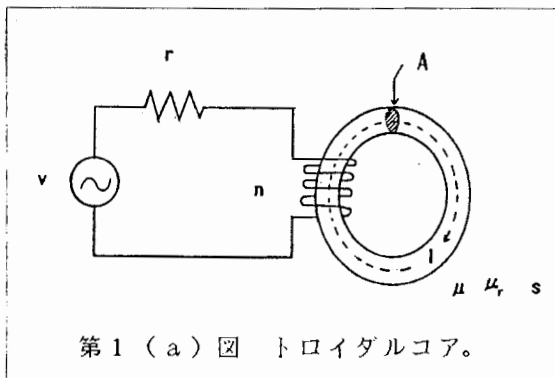
の関係を得る。ここで、磁束鎖交数  $\lambda$ 、インダクタンス  $L$ 、抵抗  $R$ 、およびキャパシタンス  $C$  を次のように定義すれば、

$$\begin{aligned} \lambda &= n \phi = n A B, \\ L &= n^2 L_i = n^2 \mu A / l, \\ R &= n^2 R_i = n^2 s A / l, \\ C &= \mu_r / (r s). \end{aligned} \quad (13)$$

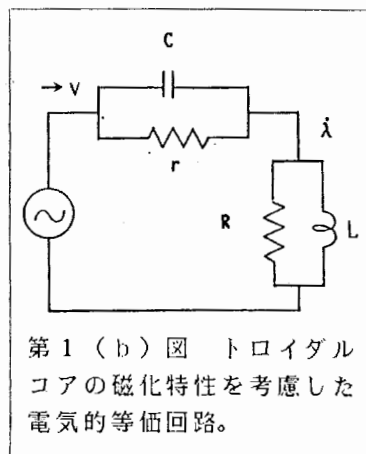
これらのパラメータを使って、(12)式は次のように書ける。

$$\frac{v - d\lambda/dt}{r} + C \frac{d}{dt} \left( v - \frac{d\lambda}{dt} \right) = \frac{\lambda}{L} + \frac{1}{R} \frac{d\lambda}{dt} \quad (14)$$

(14)式から、第1(a)図のトロイダルコアの等価回路は、第1(b)図のように書ける。第1(b)図の等価回路から得られる電流と磁束鎖交数 $\lambda$ の関係は、等価回路定数が一定であれば、楕円ヒステリシスループを呈示し、電流 $i$ と磁束鎖交数 $\lambda$ が非常に小さい領域ではRayleighループを呈示する[2]。



第1(a)図 トロイダルコア。



第1(b)図 トロイダルコアの磁化特性を考慮した電気的等価回路。

## 2. 3 集中定数回路への応用

### (a) R-L回路

第1(b)図の等価回路の妥当性を調べるため、第1(b)図の等価回路から、磁束鎖交数 $\lambda$ や電流 $i$ を求める。(14)式から、

$$\frac{v}{r} + C \frac{dv}{dt} = C \frac{d^2\lambda}{dt^2} + \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{R} \right) \frac{d\lambda}{dt} + \frac{1}{L} \lambda \quad (15)$$

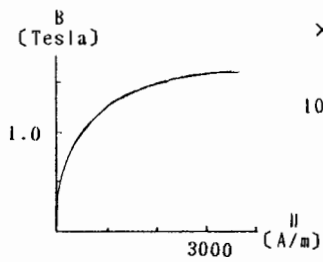
が成り立つ。(15)式を解いて、磁束鎖交数 $\lambda$ が求まるとすれば、電流 $i$ の値は(10)式から、

$$i = \frac{1}{r} \left( v - \frac{d\lambda}{dt} \right) \quad (16)$$

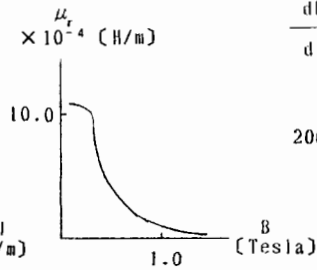
として求められる。

第2(a)図に透磁率 $\mu$ を与える理想磁化曲線を示し、第2(b)図に可逆透磁率 $\mu_r$ と磁束密度 $B$ の関係が示してある。さらに第2(c)図にヒステリシス係数 $s$ を与える磁界 $H$ と $(dB/dt) - \mu_r (dH/dt)$ の関係が示して

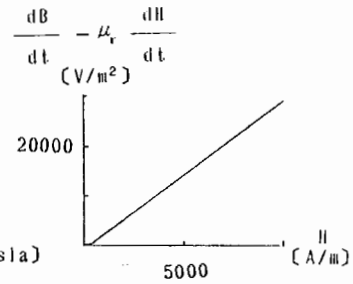
ある。また、第1表に供試リアクトルの諸定数が示してある。



第2(a)図  
理想磁化曲線。



第2(b)図  
可逆透磁率 $\mu_r$ と  
磁束密度Bの関係。

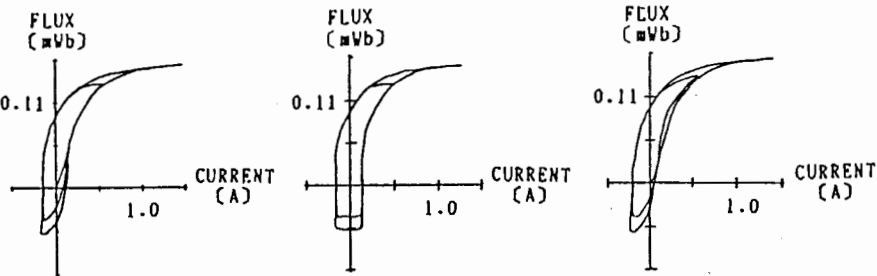


第2(c)図  
ヒステリシス係数s  
を与える曲線。

第1表 供試トロイダルコアの諸定数。

巻数	$n = 900$ [Turn]	断面積	$A = 0.0001$ [m <sup>2</sup> ]
抵抗	$r = 7.66$ [ $\Omega$ ]	平均磁路長	$l = 0.28$ [m]

(15)式と(16)式をデジタル計算機で、正弦波入力電圧とし、振幅を5 [v] から300 [v] および周波数を5 [Hz] から500 [Hz] まで変えた種々の条件で計算した。その結果、上記の条件下では比較的よく実験結果を再現した。第3(a)図にその計算例を示す。また比較のためプロトタイプのChua型モデルによる計算結果を第3(b)図、実験値を第3(c)図に示す。第3(a)図と第3(b)図を比較すると、明らかに新Chua型モデルの再現性が優れていることがわかる。



[各モデル  $V = \sqrt{2} \times 19.95 \times \sin(2 \times \pi \times 50t + 0)$ ]

第3(a)図  
新型モデル。

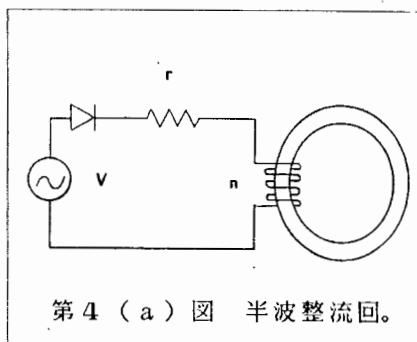
第3(b)図  
旧型モデル。

第3(c)図  
実験値。

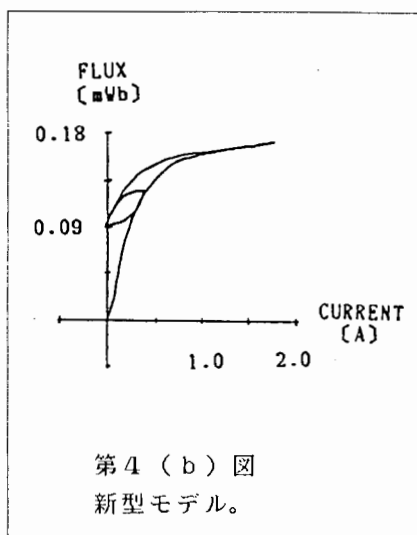
(b) 半波整流回路

第4(a)図に示すようにトロイダルコアに直列にダイオードを接続した半波整流回路について計算を行う。これは、半波整流回路では電流が不連続となり、磁気余効プロセスやマイナーループの再現性を検討できるためである。この場合の等価回路は第1(b)図と同様な形となるが、抵抗 $r$ がコイルの本来の抵抗とダイオードの抵抗の和となる点が異なる。また、ダイオードの抵抗は電流 $i$ の関数とし、電流 $i$ が負のとき抵抗は数値的に無限に大きい値 $10^{30}$  [ $\Omega$ ]とし、電流 $i$ が正又は零のときは、ダイオードの抵抗は $0$  [ $\Omega$ ]として計算を行った。

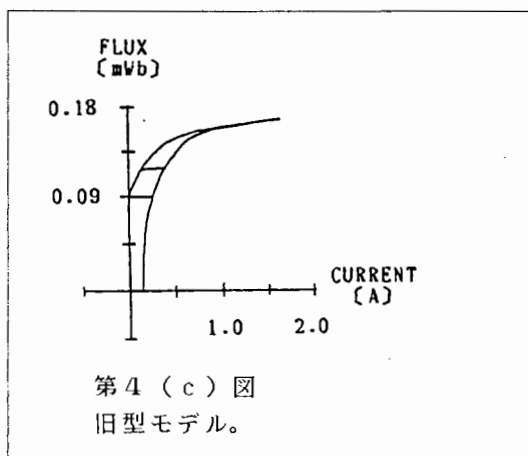
第4(b)図に新Chua型モデルによる計算結果を示し、第4(c)図にプロトタイプの新Chua型モデルによる計算結果を示す。さらに、第4(d)図に実験値を示す。第4(b)、4(c)及び4(d)図を比較すると、明らかに新Chua型モデルの再現性が、マイナーループの形状や磁化反転時の傾向等について改善されていることがわかる。



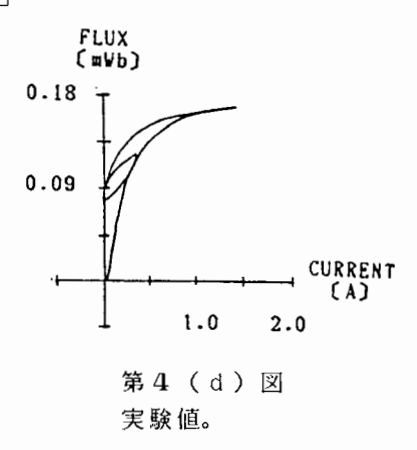
第4(a)図 半波整流回。



第4(b)図  
新型モデル。



第4(c)図  
旧型モデル。

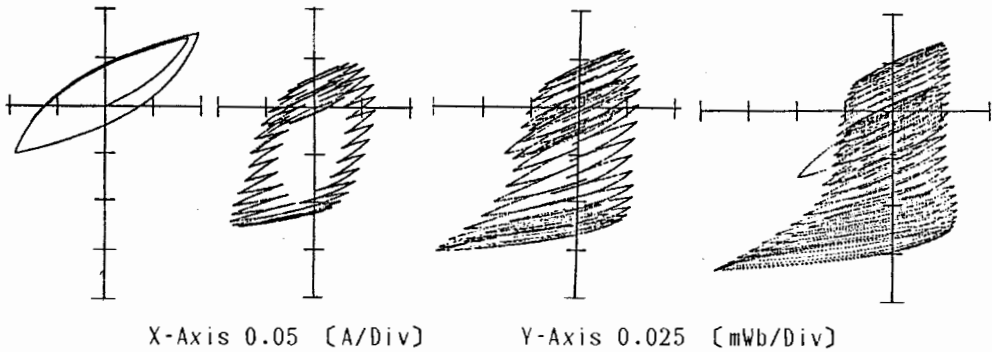


第4(d)図  
実験値。



(c) SHAKING特性

比較的低周波の磁界の磁気遮蔽を行う場合、磁気遮蔽を行う磁性材料に交流磁界のバイアスを加えると遮蔽効果が増大することが知られている[6]。この原因は、交流バイアス磁界が理想磁化曲線測定時と同様な働きを行うため、見掛け上透磁率が增大するためと考えられている[7]。これらに Shaking特性を吟味するため、第1(a)図の電圧を5〔Hz〕と150〔Hz〕の周波数とし、交流バイアスとなる150〔Hz〕の電圧を変化して計算した結果が第5図に示してある。第5(a)図から交流バイアスが存在しない場合、Rayleighのループが再現されていることがわかる、第5(b)図では、交流バイアスのため見掛け上ヒステリシスループの幅が狭くなっていることがわかる。第5(c)、(d)図では、Shakingの効果が大きく、見掛け上の透磁率は大きくなることが想定される。一方、第5(e)図では、交流バイアスが大きすぎるため飽和の影響が現れ始めている。従って、見掛けの透磁率は小さくなっていると考えられる。

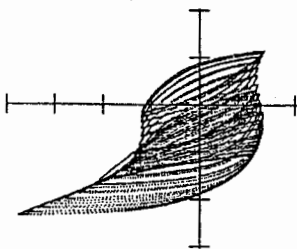


(a)

(b)

(c)

(d)



X-Axis 0.1 [A/Div]

Y-Axis 0.05 [mWb/Div]

(e)

IMPRESSED VOLTAGE

$$V = \sqrt{2} [V_1 \cos(2\pi 5t) + V_2 \cos(2\pi 150t)]$$

(a)  $V_1=1.0$        $V_2=0.0$

(b)  $V_1=1.0$        $V_2=2.5$

(c)  $V_1=1.0$        $V_2=5.0$

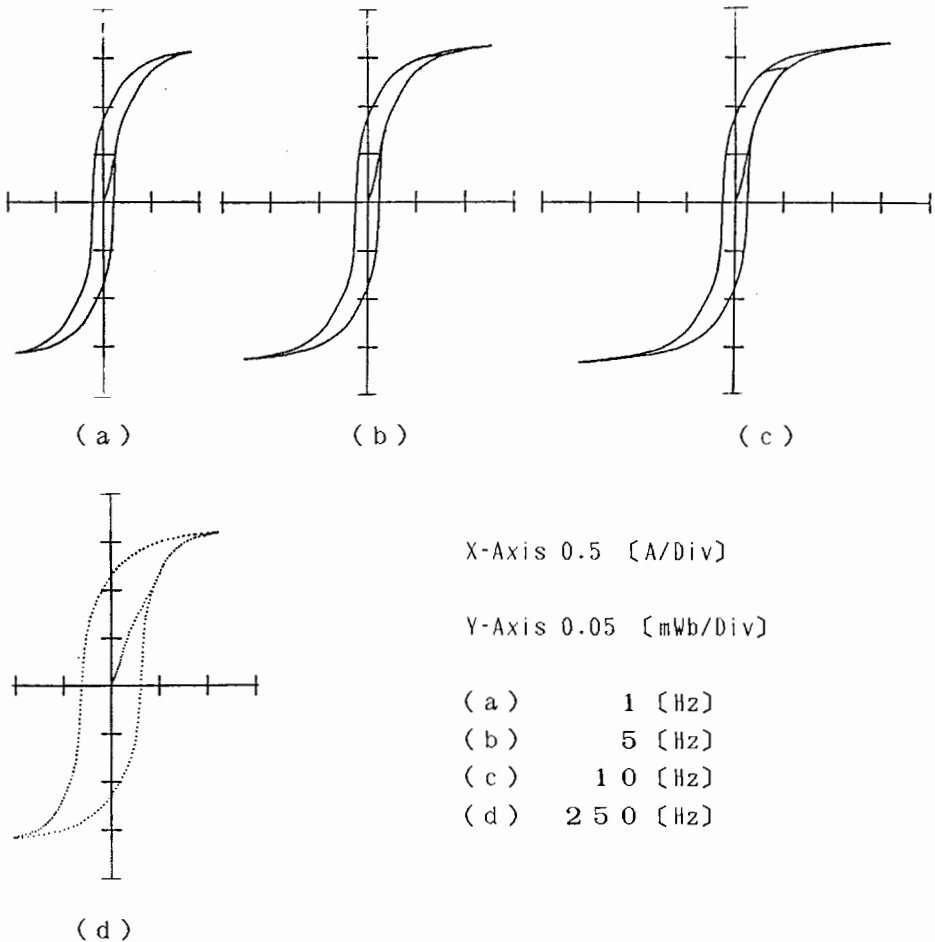
(d)  $V_1=1.0$        $V_2=10.0$

(e)  $V_1=1.0$        $V_2=20.0$

第5図 SHAKING特性。

(d) 周波数特性

ヒステリシスループは励磁周波数が高いとループ幅が広がり、励磁周波数が低くなるとループ幅が狭くなる特性、すなわち周波数特性を持つことが知られている。また、励磁周波数をある程度まで低くするとそれ以下の周波数では、ヒステリシスループがほとんど変化しない、いわゆる静的又は周波数に独立なヒステリシスループの存在が知られている。これらの特性の再現性を調べるため、励磁周波数を  $f = 250, 10, 5, 1$  [Hz] としてヒステリシスループを計算した結果が第6図に示してある。第6図から、励磁周波数が高いほど、ヒステリシスループの幅が広がるのがわかる。さらに、励磁周波数が  $f = 5$  [Hz] 以下ではほとんどヒステリシスループが変化しない静的なヒステリシスループが再現されていることがわかる。



第6図 周波数特性。

### 3 結言

本稿では、新Chua型モデルの電氣的等価回路を導き、ヒステリシスループの再現性を実験値と比較して種々検討した。その結果、ほぼ満足すべき良好な結果が得られ、旧Chua型モデルの再現性がかなり改善されていることを確認した。

#### 参考文献

- [1] Y.Saito and et al, IEEE Trans., Magnetics, Vol. MAG-20, No.5 (1984) pp.1234-1436.
- [2] Y.Saito and et al, IEEE Trans., Magnetics, Vol. MAG-22, No.5 (1986) pp.647-649.
- [3] L.O.Chua et al, IEEE Trans., Circuit Theory, Vol. CT-17, No.4 (1970) pp.564-574.
- [4] 斎藤 他、電気学会マグネティクス研究会資料、Vol. MAG-86-110.
- [5] 斎藤 他、電気学会マグネティクス研究会資料、Vol. MAG-87-63.
- [6] David Cohen et al, APPLIED PHYSICS LETTERS, Vol.10, No.3 (1967) pp.67-69.
- [7] V.O.Kelha et al, IEEE Trans., Magnetics, Vol. MAG-16, NO.4 (1980) pp.575-578.