

楢円近似ヒステリシスモデルによる損失計算
Application of A Chua Type Model to the Loss Calculation

斉藤兆古, 福島一弘, 早野誠治, 津屋昇
Y. Saito K. Fukushima S. Hayano N. Tsuya

法政大学 工学部
College of Engineering, Hosei University

1. まえがき

磁性材料を利用する機器には、大型発電機や電動機のような電力用機器から磁気記録装置やセンサー等に至るまで極めて多くの種類が存在する。このような磁気装置を設計する場合、多くの従来の方法では過去の経験に基づく試行錯誤的な設計が通例であるが、近年では、デジタル計算機の普及に伴い、FEMやFDMなどにより磁気装置の磁界分布を解析し、その結果を用いた最適設計を行う方法も検討されている。

従来経験に基づく方法、又はデジタル計算機を用いる方法のいずれにおいても、磁気装置を構成する磁性材料の特性を把握し、いかに数式的に表現するかが設計結果の妥当性を支配する重要な段階である。これまでの磁化特性モデルは磁気飽和のみを考慮したものが大半を占めているが、損失等の解析を行う場合、磁気飽和に加えて磁気ヒステリシスを考慮する必要がある。

筆者等は、L. O. Chua等によって開発された汎用電子回路解析プログラムのための非線形インダクターモデル(1)を一般化し、磁界分布等の算定に応用する一方で(2-10)、Preisach型モデル(11)との関係を明らかにし、両者の複合モデルを導出した(12,13)。

本報告では、新Chua型モデル(12-14)において、各パラメータを一定値としたときに得られる楢円近似ヒステリシスモデル(13,15)により損失計算を行い、実験値と比較検討し、このモデルの妥当性を吟味する。

なお、本報告で述べる磁化特性モデルは、従来通り、磁束密度は常に磁界の強さに平行であるとした理想的な実験装置で得られる磁化特性を前提としている。

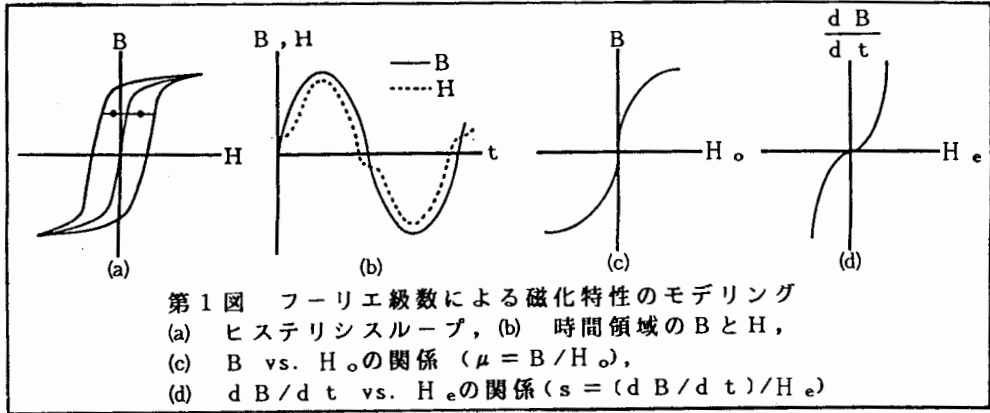
2. 磁化特性モデル

2.1. Chua型モデル

磁束密度 B が時間 t に対して正弦波状に変化しているとき、第1図(a)に示すようなヒステリシスループが得られたものとする。このとき磁束密度 B と磁界の強さ H を時間 t に対して描いた図が第1図(b)に示してある。第1図(b)の磁界 H をフーリエ級数で表すと(10)、

$$H = \sum_{n=1}^{\infty} H_{sn} \sin(n\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} H_{cn} \cos(n\omega t), \quad (1)$$

となる。ここで、基本波の周期を T とすれば、 H_{sn} と H_{cn} は



$$\begin{cases} H_{sn} = -\frac{2}{T} \int_0^T H \sin(n \omega t) dt, \\ H_{cn} = -\frac{2}{T} \int_0^T H \cos(n \omega t) dt, \end{cases} \quad (2)$$

である。(1)式で、磁束密度Bと同相成分は、奇関数であるから、

$$H_0 = \sum_{n=1}^{\infty} H_{sn} \sin(n \omega t), \quad (3)$$

で与えられる。一方、磁束密度の微分 $d B / d t$ と同相成分は、偶関数であるから、

$$H_e = \sum_{n=1}^{\infty} H_{cn} \cos(n \omega t), \quad (4)$$

で与えられる。磁束密度Bと磁界の奇関数成分 H_0 は同相であるから、両者の関係は透磁率 μ を用いて、

$$H_0 = (1/\mu) B, \quad (5)$$

で表される。また、磁束密度の時間微分 $d B / d t$ と磁界の偶関数成分 H_e は同相であるから、両者の関係は、磁気ヒステリシス係数 s を用いて、

$$H_e = (1/s) d B / d t, \quad (6)$$

で表される。(1)式の磁界Hは、磁界の奇関数成分 H_0 と偶関数成分 H_e の和で表されるから、(5), (6)式より、

$$H = (1/\mu) B + (1/s) d B / d t, \quad (7)$$

が成り立つ。ここで透磁率 μ は定数ではなく、磁束密度 B の一価関数として第 1 図(c) から与えられる。第 1 図(c)の曲線は、第 1 図(a)のヒステリシスループで、上昇時と下降時の同一磁束密度 B に対応するそれぞれの磁界 H の平均値をトレースした曲線と一致する (16)。

他方、磁気ヒステリシス係数 s も定数ではなく、第 1 図(d)に示されているように磁束密度の時間微分 $d B / d t$ の一価関数として表される。(7)式は Chua型モデルを一般化したものである。

2.2. 実験的事実との比較

Chua型モデルのパラメータは、磁束密度 B の一価関数で与えられる透磁率 μ と磁束密度の時間微分 $d B / d t$ の一価関数で与えられる磁気ヒステリシス係数 s である。

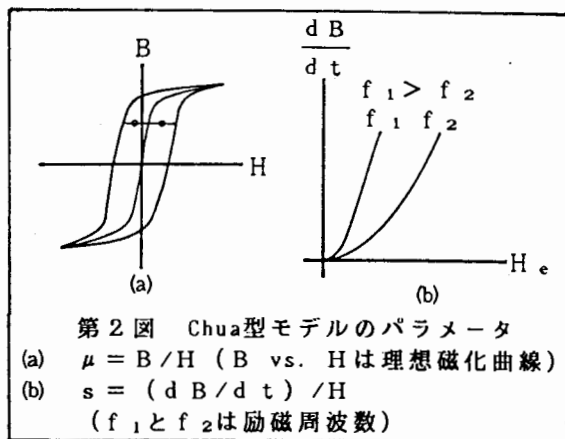
透磁率 μ を与える $B-H$ 曲線は、第 2 図(a)に示すように、ヒステリシスループの上昇曲線と下降曲線で同一磁束密度 B に対応するそれぞれの磁界 H の平均値をトレースした曲線と一致する (16)。磁化特性を表す $B-H$ 特性曲線で、直流と交流の磁界で磁化し、交流の磁界を飽和値に達する十分大きな値から零まで減少して得られる磁束密度 B と直流磁界 H の関係を示す曲線を理想磁化曲線 (Ideal Magnetization Curve 又は Anhyseretic Magnetization Curve) と称する。Bozorthは、この理想磁化曲線が、第 2 図(a)に示すヒステリシスループの上昇曲線と下降曲線で同一磁束密度 B に対応するそれぞれの磁界 H の平均値とよく一致することを指摘した (17)。従って、Chua型モデルの透磁率 μ を与える $B-H$ 曲線は理想磁化曲線と考えられる。理想磁化曲線は、その測定法方から明らかなように、磁化の周波数に依存せずユニークに決定される。このことから、Chua型モデルの透磁率 μ は、理想磁化曲線から磁束密度 B の一価関数としてユニークに決定される。

他方、Chua型モデルのもう一個のパラメータである磁気ヒステリシス係数 s を与える $d B / d t$ 曲線は、第 2 図(b)に示すように磁化の周波数に依存して異なる。従って、Chua型モデルのパラメータで磁気ヒステリシス係数 s をユニークに決定することは困難である。しかしながら、Chua型モデルが比較的实验事実をよく再現することも報告されている (1, 2, 6, 7)。これは、Chua型モデルを応用した例において、比較的磁束密度の高い飽和領域まで磁化した場合を取り扱っているためである。すなわち、透磁率 μ が系を支配し、磁気ヒステリシス係数 s の影響が小さい問題に対しては、Chua型モデルは十分な再現性を有する。

2.3. 新Chua型モデル

磁化特性モデルは、その第一前提として、結果として磁気履歴特性を呈示するものであり、モデルを構成するパラメータが磁気履歴特性に影響されことは論外である。各種の磁化曲線の中で、過去の履歴に無関係にユニークに決定されるものは理想磁化曲線である。この理想磁化曲線は次式によって与えられるものとする。

$$H = \frac{1}{\mu} B. \quad (8)$$



ここで、透磁率 μ は磁束密度 B の一価関数で与えられるものとする。

磁化特性の中で、可逆的な磁化特性を表すパラメータとして可逆透磁率 μ_r が知られている。可逆透磁率 μ_r はバイアス磁束密度 B 上で、微小磁界 ΔH の変化に対する微小磁束密度 ΔB の比を考え、微小磁界 ΔH を零に近づけた場合に得られる。即ち、可逆透磁率 μ_r は、

$$\mu_r = \lim_{\Delta H \rightarrow 0} \frac{\Delta B}{\Delta H}, \quad (9)$$

で定義される。(9)式から得られる可逆透磁率 μ_r は、それ自身が過去の履歴に依存せず可逆的であっても、バイアス磁束密度 B が過去の履歴に影響される場合は結果として磁気履歴に依存するパラメータとなるため、磁化特性のパラメータとして使用できない。可逆透磁率で過去の履歴に無関係なものは、理想磁化曲線の測定時に得られる可逆透磁率である。

なぜなら、バイアス磁束密度を与える理想磁化特性が、過去の磁気履歴に関係せずユニークに決定されるためである。可逆透磁率は、実質的には微分透磁率に等しいから、

$$dH = \frac{1}{\mu_r} dB, \quad (10)$$

又は、

$$\frac{\mu_r}{s} \frac{dH}{dt} = \frac{1}{s} \frac{dB}{dt}, \quad (11)$$

が成り立つ。(11)式で、 s は磁気ヒステリシス係数である。(8)式は、原点からの磁化特性を意味し、(11)式は理想磁化曲線上での微小部分の磁化特性を意味するから、(8)式と(11)式の和である次式

$$H + \frac{\mu_r}{s} \frac{dH}{dt} = \frac{1}{\mu} B + \frac{1}{s} \frac{dB}{dt}, \quad (12)$$

は全体の磁化特性を表す(18)。

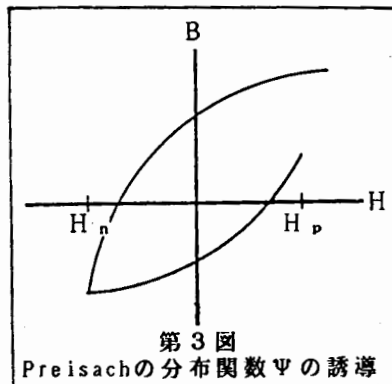
2.4. Preisach型モデルとの関係

Preisachの分布関数 Ψ は、現時点での磁界を H_p 、反転時の磁界を H_n とすれば次式で表される(11,12)。

$$\Psi = \frac{\partial^2 (H_p, H_n)}{\partial H_n \partial H_p}. \quad (13)$$

Preisachの分布関数 Ψ とChua型モデルのパラメータである磁気ヒステリシス係数 s は次式で関係づけられる(12,15)。

$$s = \Psi \frac{\partial H}{\partial t}. \quad (14)$$



(14)式を(12)式に代入すると、新Chua型モデルとPreisach型モデルの複合型モデルが次式のように与えられる。

$$H + \frac{\mu_r}{\Psi} = \frac{1}{\mu} B + \frac{1}{\Psi} \frac{dB}{dH} \quad (15)$$

2.5. Rayleigh範囲の特性

磁束密度が低いために、(15)式のパラメータを一定値とし、磁束密度の最大値と最小値の大きさが等しくなる条件で(15)式からヒステリシスループを求めると、次式ようになる。

$$B = \mu_r (H_p \pm H_n) \pm \frac{\mu}{\Psi} \left(1 - \frac{\mu_r}{\mu}\right) \{e^{K} - 1\} \mp B_n e^K \quad (16)$$

但し、 K は、 $K = \mp \Psi / \mu (H_p \pm H_n)$ 。

ここで、記号+と-はそれぞれ上昇と下降曲線に対応し、 H_p は現時点での磁界である。また、 B_n は H_n を反転時の磁界として

$$B_n = \mu H_n + \left(\mu H_n - \frac{\mu}{\Psi} + \frac{\mu \mu_r}{\Psi} \right) \tanh \frac{\Psi}{\mu} H_n, \quad (17)$$

で表される。(16)、(17)式で、磁界 H_p と H_n が十分小さく、指数関数および双曲線関数がTaylor展開の第3項までで近似されるとするならば、(16)式は

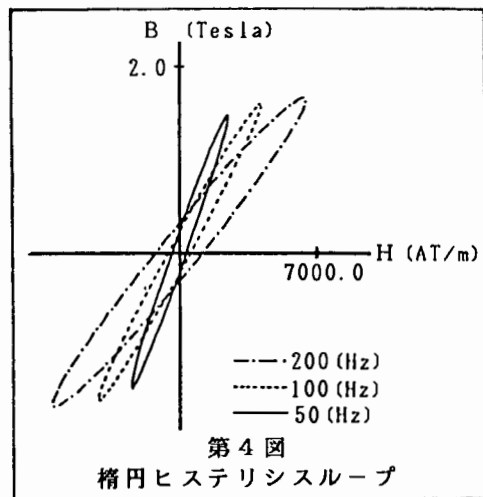
$$B = (\mu_r + \Psi H_n) H_p \pm \frac{1}{2} \Psi (H_p^2 - H_n^2) \quad (18)$$

となる。但し、 $\mu \gg \mu_r$ と仮定している。(18)式は明らかにRayleigh loop (19)である。以上の結果から、新Chua型モデルとPreisach型モデルの結合に基づく複合モデル(15)式は、低磁束密度領域でRayleighの関係性を全て満足することが示された(13)。

3. 楕円ヒステリシスモデル

3.1. 楕円ヒステリシスループ

(12)式で与えられる新Chua型モデルは、パラメータである μ 、 μ_r 、 s を一定値としたとき、ヒステリシスループを楕円近似したモデルとなる(13,15)。具体的な例として、楕円ヒステリシスループ群を第4図に示す。



3.2. ヒステリシス損

(12)式で与えられる新Chua型モデルは、パラメータである μ , μ_r , s を一定値としたとき、ヒステリシスループを楕円近似したモデルとなる。これは、線形モデルであるので、ヒステリシス損は次式で与えられる(15)。

$$P_h = \frac{1}{2} \frac{\mu (\mu - \mu_r)}{s^2 + \omega^2 \mu^2} s \omega H_m. \quad (19)$$

ここで、磁束密度 B は正弦波状に変化しているものとし、 ω , H_m はそれぞれ角周波数、最大磁界である。

3.2.1. 低磁束密度領域

低磁束密度領域では、磁気ヒステリシス係数 s は(14)式より

$$s = \Psi \omega H_m, \quad (20)$$

で与えられる。ここで、(12)式を磁束密度が低いために、透磁率 μ もPreisachの分布関数 Ψ も一定値とし、さらに初期磁束密度を零として解くと、

$$B = \mu H + \frac{\mu}{\Psi} (\mu_r - \mu) \{1 - e^{-(\Psi/\mu)H}\}, \quad (21)$$

となり、(21)式で磁界 H が極めて小さく、指数部がTaylor展開の第3項までで近似されるとすれば(22)式となる。

$$B = \mu_r H + \frac{1}{2} \Psi H^2. \quad (22)$$

(22)式及び次式で与えられるRayleighの初期磁化曲線

$$B = \mu_i H + \frac{1}{2} \nu H^2, \quad (23)$$

により、Preisachの分布関数 Ψ と可逆透磁率 μ_r はそれぞれRayleighの定数 ν と初期透磁率 μ_i に等しく(12)、

$$\Psi H_m = \nu H_m = \frac{B_m}{H_m} - \mu_i = \mu - \mu_i = \mu - \mu_r, \quad (24)$$

となる。(20), (24)式を(19)式に代入すると低磁束密度領域におけるヒステリシス損の式が導かれる。

$$P_h = \frac{\mu (\mu - \mu_r) \Psi \pi f H_m^3}{(\mu - \mu_r) + \mu^2} \doteq \frac{\pi}{2} f \Psi H_m^3 \doteq \frac{\pi}{2} f B_m H_m. \quad (25)$$

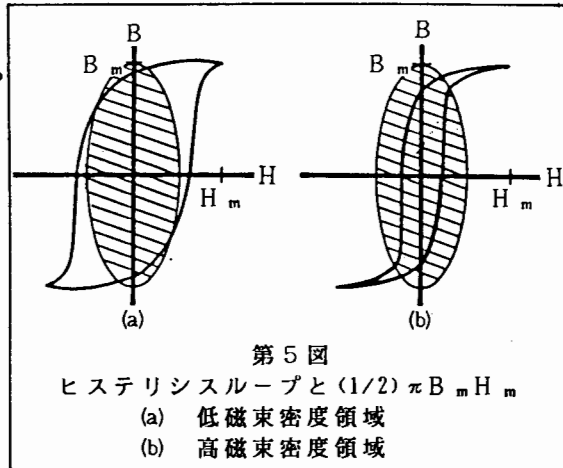
ここで、 $\omega = 2\pi f$ (f は周波数)、 $\mu \gg \mu_r$ である。

一方, Rayleigh loopによるヒステリシス損は $\nu = \Psi$ と仮定すると次式で与えられる。

$$P_h = \frac{4}{3} f \Psi H_m^3 \quad (26)$$

(25), (26)式を比較してみると, 定数項の $\pi/2$ と $4/3$ の差だけであり, このモデルは Rayleigh loop によるヒステリシス損の公式に対応する式を与えることがわかる。

(25)式の $(1/2) \cdot \pi B_m H_m$ は, 第5図(a), (b)の楕円(斜線部分)の面積に相当する。低磁束密度領域では, ヒステリシスループは第5図(a)に示すような形状となり, (25)式による計算結果は小さめの値となる。高磁束密度領域では, ヒステリシスループは, 第5図(b)に示すような形状となり, (25)式による計算結果は大きめの値となる。



3.2.2. 高磁束密度領域

高磁束密度領域では, 磁気ヒステリシス係数 s は次式で近似される。

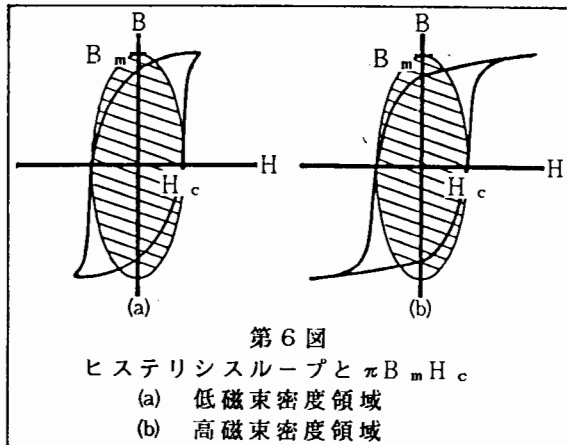
$$s = \omega (B_m - \mu_r H_m) / H_c \cong \omega B_m / H_c \quad (27)$$

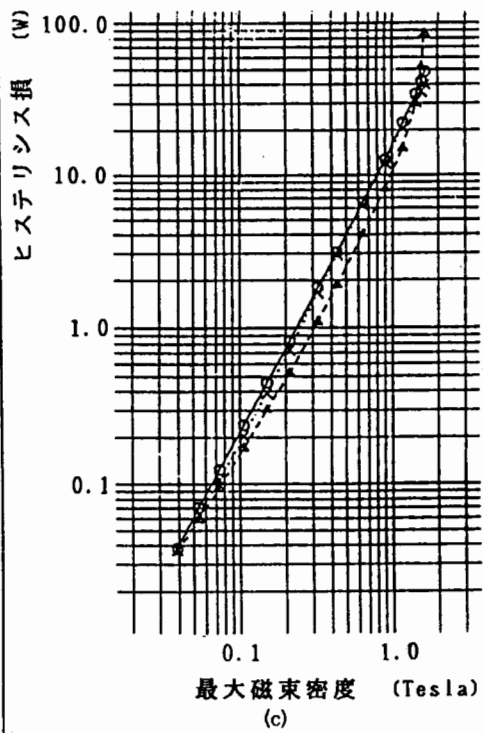
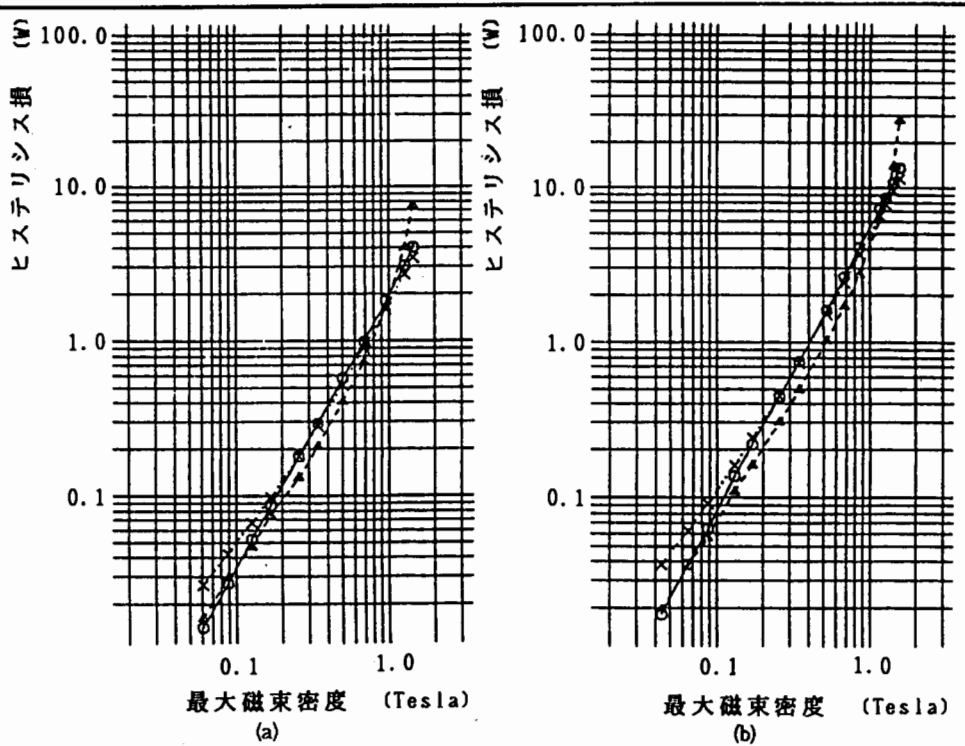
ここで, B_m, H_c はそれぞれ最大磁束密度, 保磁力であり, $B_m \gg \mu_r H_m$ であるとする。(27)式を(19)式に代入すると, 高磁束密度領域におけるヒステリシス損の式を得る。

$$P_h = \frac{1}{2} \frac{\mu \omega B_m H_c (\mu - \mu_r)}{B_m^2 + (\mu H_c)^2} \cong \pi f B_m H_c \quad (28)$$

但し, $B_m \cong \mu H_m, H_m \gg H_c$ であるとする。保磁力 H_c は, $H_c = a + b B_m$ で近似されるものとし, パラメータ a, b は実験により決定されるものとする。

第6図(a), (b)は, それぞれ低磁束密度領域, 高磁束密度領域におけるヒステリシスループを示し, その斜線部は, (28)式の $\pi B_m H_c$ に相当する。これらの図より, (28)式は低磁束密度領域, 高磁束密度領域ともほぼ実験値に等しい計算値を示すことがわかる。





- 供試トロイダルリアクトル
- 励磁コイルの巻数： 900 [Turn]
 - 励磁コイルの抵抗： 14.5 [Ω]
 - さぐりコイルの巻数： 900 [Turn]
 - さぐりコイルの抵抗： 19.0 [Ω]
 - コアの断面積： 1.0×10^{-4} [m^2]
 - 平均磁路長： 0.2512 [m]
 - 厚さ1.0[mm]の鉄板を10枚積層

.....x..... (28)式による計算値
 ---▲--- (25)式による計算値
 —○— 実験値

第7図 ヒステリシス損
 (a) 50 (Hz) (b) 100 (Hz) (c) 200 (Hz)

3.3. 実験値との比較

第7図(a)~(c)は、周波数が50, 100, 200 [Hz] の場合の実験値と(25), (28)式を用いた計算結果を示す。

(25)式を用いた計算結果は、低磁束密度領域では実験値に対してほぼ等しいか若干小さめの値を取る傾向があり、磁束密度の増加とともに負の誤差が増加していく。高磁束密度領域では徐々に負の誤差が減少していき、1.0(Tesla)を超えたあたりで実験値とほぼ等しくなり、その後は実験値よりも大きめの値となり、磁束密度の増加とともに誤差も増加する傾向がある。

一方、(28)式を用いると、50及び100(Hz)の場合は低磁束密度領域では大きめの値を取り、高磁束密度領域ではほぼ実験値に等しい値を取る。200(Hz)の場合は、1.0(Tesla)付近で若干の誤差があるが、全域ではほぼ実験値に等しいといえる結果となっている。

以上のことより、50及び100(Hz)では、低磁束密度領域においては(25)式を用い、高磁束密度領域では(28)式を用いたほうがより実験値に近い良好な結果を得ることができ、200(Hz)では、全域にわたって(25)式よりも(28)式を用いたほうが良い結果を得られることがわかる。これは、周波数を上げていくと、ヒステリシスループが膨らんでいくことによるものである。

4. 結論

本稿では、Chua型モデルをフーリエ級数を用いて導出し、このモデルの欠点を克服する新Chua型モデルを導出した。また、新Chua型モデルとPreisach型モデルとの複合モデルを導出した。さらに、新Chua型モデルにおいて、モデルのパラメータである μ , μ_r , s を一定値としたときに得られる楕円近似ヒステリシスモデルを導出し、このモデルよりヒステリシス損を求めるための簡単な式を導出した。これにより、オシロスコープ等でヒステリシスループを観測し、 B_m と H_m , あるいは B_m と H_c を測定するだけで簡単にヒステリシス損を概算することができる。

参 考 文 献

- (1) L. O. Chua and et al, IEEE Trans., Circuit Theory Vol. CT-07, No. 4, Nov. 1970, pp. 564-574.
- (2) Y. Saito and et al, IEEE Trans., Magnetics, Vol. MAG-18, No. 2, March 1982, pp. 546-551.
- (3) Y. Saito and et al, Comp. Meth. Appl. Mesh., Vol. 38, No. 2, June 1983, pp. 182-202.
- (4) Y. Saito and et al, IEEE Trans., Magnetics, Vol. MAG-19, No. 5, September 1983, pp. 2189-2191.
- (5) Y. Saito and et al, IEEE Trans., Magnetics, Vol. MAG-19, No. 6, November 1983, pp. 2510-2513.
- (6) Y. Saito and et al, IEEE Trans., Magnetics, Vol. MAG-20, No. 5, September 1984, pp. 1434-1436.
- (7) Y. Saito and et al, IEEE Trans., Magnetics, Vol. MAG-20, No. 5, September 1984, pp. 1965-1967.
- (8) Y. Saito and et al, Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., Vol. 49, No. 1, May 1985, pp. 109-119.
- (9) Y. Saito and et al, IEEE Trans. Magnetics, Vol. MAG-21, No. 6, November 1985, pp. 2280-2283.

- (10) Y. Saito and et al, Journal of Magnetism and Magnetic Materials, Vol. 54-57, 1986, pp. 1613-1614
- (11) F. Preisach, Zeitschrift für Physik, Vol. MAG-94, No. 5-6, Feb. 1935, pp. 1965-1967.
- (12) 齐藤 他, 電気学会 Magnetics研究会資料, No. MAG-86-109, Oct, 1986.
- (13) 齐藤 他, 電気学会 Magnetics研究会資料, No. MAG-86-110, Oct, 1986.
- (14) 齐藤 他, 電気学会 Magnetics研究会資料, No. MAG-86-111, Oct, 1986.
- (15) Y. Saito and et al, IEEE Trans. Magnetics, April 1987 in printing.
- (16) 齐藤 他, 電気学会 Magnetics研究会資料, No. MAG-85-64, July 1985.
- (17) R. M. Bozorth, Ferromagnetism (Van Nostrand. 1951).
- (18) Y. Saito and et al, IEEE Trans. Magnetics, Vol. Mag-22, No. 5, September 1986, pp. 647-649
- (19) S. Chikazumi and et al, Physics of Magnetism (John Wiley and Sons, 1964)