

## Voronoi-Delaunayの離散化法による電磁界計算

Electromagnetic Fields Calculation  
using Voronoi-Delaunay Discretization

## その3. Voronoi-Delaunay線図の性質とその応用

齊藤兆古、早野誠治、木住野泰光、池口修一、福島一弘  
Y.Saito, S.Hayano, Y.Kishino, S.Ikeguchi, K.Fukushima法政大学 工学部  
College of Engineering, Hosei University

## 1. まえがき

筆者等は、電磁界系を支配する偏微分方程式を効率よく解くためにVoronoi-Delaunay離散化法を提唱している[1-6]。Voronoi-Delaunay離散化法は、Delaunay系の節点間の経路とVoronoi系節点間の経路が互いに直交する性質を利用し、少ない節点数で同一問題領域をVoronoi系とDelaunay系で重複して計算し、それぞれの結果を組み合わせることで高速に高精度の数値解を得る方法である。

本稿では、Voronoi-Delaunayの線図の性質を吟味し、その結果から、最適meshや等potential線作成に対する補間等に関する考察を与えようとするものである。

## 2. 数学的model

## 2.1 支配方程式

電気工学だけでなく、工学の諸分野におけるfield解析の多くはPoisson型の偏微分方程式を解くことに帰する。ここでは、 $\lambda$ を媒質のparameter、 $\phi$ をscaler又はvector potentialのz方向成分として、次式のPoisson型の偏微分方程式を電磁界系の支配方程式と仮定する。

$$\lambda \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \lambda \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \sigma = 0, \quad (1)$$

ここで、 $\sigma$ はsource densityの項とする。

## 2.2 境界条件

媒質のparameter  $\lambda$ が異なる境界において、field intensityの境界に平行な成分が等しい条件：

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_{\text{領域 I}} = \left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_{\text{領域 II}}, \quad (2)$$

およびflux densityの境界に垂直な成分が等しい条件：

$$\lambda_1 \left. \frac{\partial \phi}{\partial n} \right|_{\text{領域 I}} = \lambda_2 \left. \frac{\partial \phi}{\partial n} \right|_{\text{領域 II}}, \quad (3)$$

が満足すべき条件とする。ここで(2)式中の $t$ および(3)式中の $n$ はそれぞれ境界の平行方向と垂直方向を示すものとする。

また、問題空間とその領域をとり囲む境界では、次式で与えられるNeumann型境界条件：

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \psi, \quad (4)$$

と、次式で与えられるDirichlet型境界条件：

$$\phi = \phi_0, \quad (5)$$

が満足すべき条件である。(4)式中の $\phi$ と(5)式中の $\phi_0$ はそれぞれ一定値であるが、特に(4)式中の $\phi=0$ 、すなわち

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0, \quad (6)$$

の条件は対称境界条件として知られている。

### 2.3 離散化model

(1)式で代表される支配方程式を数値的に解く場合、その手順は大きく分けて次の三段階となる。

- 1) 支配方程式の離散化表現。
- 2) 離散化された支配方程式を解く。
- 3) 離散化された値の内挿による連続系の表現。

1)の段階は、支配方程式が成り立つ問題空間に節点を設け、媒質のparameterや境界条件を規定し、有限値の節点potentialで支配方程式を表現するpre-processingの過程である。2)の段階は、有限個の節点potentialで表わされた支配方程式(通常連立方程式)を解くmain calculationの過程である。節点数が多いほど支配方程式の離散化表現の精度が高くなるが、この節点potentialを求めるmain calculation processに費やされる計算時間は巨大なものとなる。したがって、この段階は、常に計算の精度と経済性が直接関係し、解析者の判断に依存する過程である。3)の段階は、離散化された問題空間上の節点potential間で内挿を行ない、potential分布を連続的に表現するpost-processingの過程である。

## 3. Voronoi-Delaunayの離散化法

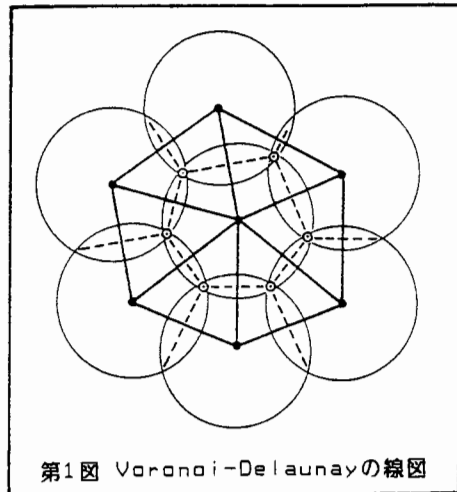
### 3.1 Voronoi-Delaunayの線図

(1)式の成り立つ二次元空間に節点が何らかの方法で設けられたとする。第1図に示すように、各節点を中心として円を描いたとき、隣接する円の交点を結ぶ線分は多角形を形成する。この多角形はVoronoiの多角形と呼ばれる。このVoronoiの多角形の辺と直交する節点間を結ぶ線分は三角形を形成し、この三角形をDelaunayの三角形と呼ぶ。

Voronoiの多角形の頂点はDelaunayの三角形の外心に位置し、Voronoiの多角形の辺は常にDelaunayの三角形の辺の垂直二等分線となる。Voronoiの多角形とDelaunayの三角形は、どちらか一方が一意的に決定されたとき、他方も一意的に決定される幾何学的双対性を持っている[6]。

### 3.2 Voronoi系の性質

第2(a)図に示すように、Delaunayの三角形の外心にVoronoiの多角形の頂点が位置し、それぞれの頂点におけるpotentialを $\phi_0$ 、 $\phi_a$ 、 $\phi_b$ 、 $\phi_c$ とする。いま第2(a)図中のpotential  $\phi_a$ 、 $\phi_b$ 、 $\phi_c$ が $\phi_0$ を中心としてTaylor級数の第3項までの項で表わされるとする。すなわち



$$\phi_a = \phi_0 - r_a \frac{\partial \phi_0}{\partial y} + \frac{r_a^2}{2} \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial y^2}, \quad (7a)$$

$$\begin{aligned} \phi_b = & \phi_0 + r_b \sin \gamma \frac{\partial \phi_0}{\partial x} \\ & + \frac{(r_b \sin \gamma)^2}{2} \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x^2} + r_b \cos \gamma \frac{\partial \phi_0}{\partial y} \\ & + \frac{(r_b \cos \gamma)^2}{2} \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial y^2} + r_b^2 \cos \gamma \sin \gamma \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x \partial y}, \end{aligned} \quad (7b)$$

$$\begin{aligned} \phi_c = & \phi_0 - r_c \sin \beta \frac{\partial \phi_0}{\partial x} \\ & + \frac{(r_c \sin \beta)^2}{2} \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x^2} + r_c \cos \beta \frac{\partial \phi_0}{\partial y} \\ & + \frac{(r_c \cos \beta)^2}{2} \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial y^2} - r_c^2 \cos \beta \sin \beta \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x \partial y}, \end{aligned} \quad (7c)$$

と書けるとする。但し、(7a)~(7c)式中の $r_a, r_b, r_c, \alpha, \beta, \gamma$ 等の記号は第2(a)図に示してある。

(7a)~(7c)式で、次式

$$r_a = a \cot \alpha, \quad r_b = b \cot \beta, \quad r_c = c \cot \gamma, \quad (8)$$

が成り立つとき、次の関係が満足される。

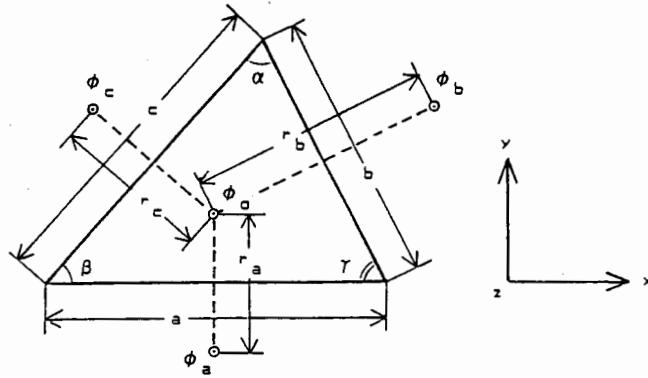
$$\begin{aligned} & \tan \alpha (\phi_a - \phi_0) + \tan \beta (\phi_b - \phi_0) + \tan \gamma (\phi_c - \phi_0) \\ = & S_d \left( \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial y^2} \right), \end{aligned} \quad (9)$$

ここで、 $S_d$ は第2(a)図のDelaunayの三角形の面積を示す。

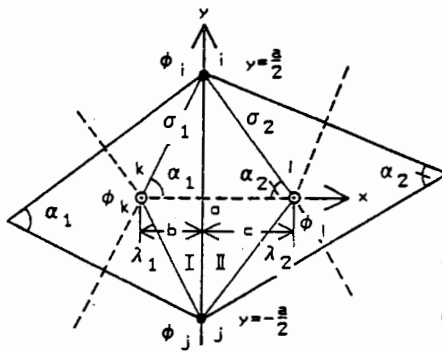
(9)式の関係から、(1)式の支配方程式は次のように離散化される。

$$\begin{aligned} & \int S_d \left[ \lambda \left( \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial y^2} \right) + \sigma \right] dx dy \\ = & \lambda \left[ \tan \alpha (\phi_a - \phi_0) + \tan \beta (\phi_b - \phi_0) \right. \\ & \left. + \tan \gamma (\phi_c - \phi_0) \right] + S_d \sigma. \end{aligned} \quad (10)$$

(10)式は、(8)式の条件すなわち、Voronoiの多角形の辺とDelaunayの三角形の辺が互いの垂直二等分線になるとき、(1)式の支配方程式がVoronoiの多角形の頂点に位置するpotentialによってTaylor級数の第3項までの精度の範囲で満足されることを意味する。



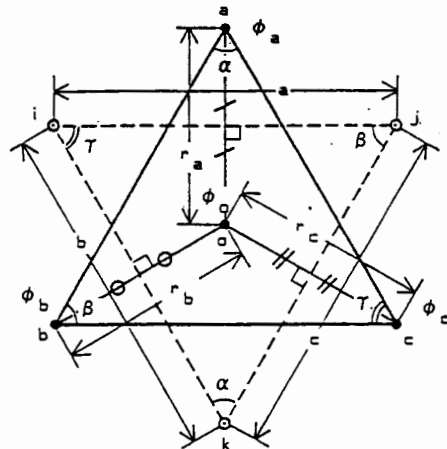
第2(a)図 Voronoiの多角形の頂点とDelaunayの三角形の関係



$\lambda_1, \lambda_2$  は媒質のparameter

$\sigma_1, \sigma_2$  は媒質のsource density

第2(b)図 Voronoi-Delaunay線図中の局所座標系



第2(c)図 Delaunayの三角形の頂点とVoronoiの多角形の関係

(1)式の支配方程式で、媒質のparameter  $\lambda$  がDelaunayの三角形によって異なる値を持ち、さらに(8)式の条件が満たされていない一般の場合[第2(b)図]を考える。この場合、第2(a)図で、 $y$ 軸方向すなわち  $\phi_a$  と  $\phi_c$  を結ぶ方向を第2(b)図の $x$ 軸方向と一致させて考えるとすれば、(10)式右辺第1項は

$$\lambda \tan \alpha (\phi_a - \phi_c) = \lambda \frac{a}{r_a} (\phi_a - \phi_c) = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \lambda \frac{\partial \phi}{\partial x} dy, \quad (11)$$

と一般化できる。第2(b)図で、節点potential  $\phi_l, \phi_k$  は領域IとIIの内部に位置するために、(2)式の境界条件を満たす試行関数を導くことは困難である。しかし、(3)式の境界条件を満たす試行関数は容易に導くことが可能で、領域Iに対する試行関数  $\phi_v$  は

$$\phi_v = \frac{1}{\frac{\lambda_1}{b} + \frac{\lambda_2}{c}} \left\{ \frac{\lambda_2}{bc} (\phi_l - \phi_k) x + \frac{\lambda_1}{b} \phi_k + \frac{\lambda_2}{c} \phi_l \right\} \quad (\text{領域I}), \quad (12)$$

で与えられる。(12)式を(11)式に代入して、

$$\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \lambda \frac{\partial \phi}{\partial x} dy = \frac{(\phi_l - \phi_k)}{\frac{1}{2\lambda_1} \cot \alpha_1 + \frac{1}{2\lambda_2} \cot \alpha_2}, \quad (13)$$

を得ることができる。(13)式は、局所一次元化法における相反変分原理または部分領域法にならって得た結果と一致する[1-6]。(10)式の右辺の残りの項も(13)式のように、媒質のparameter  $\lambda$  の違いと(8)式の条件が満たされていない場合を想定し一般化することができる。

Voronoi系において、(4)式のNeumann型の境界条件は、第2(b)図で原点oのpotentialを  $\phi_o$  とすれば、(13)式より

$$2 \tan \alpha_1 (\phi_o - \phi_k) = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \phi dy, \quad (14)$$

として満足させられる。(5)式のDirichlet型の境界条件は、(14)式で  $\phi_o$  を一定値とすることによって満足させられる。(6)式の対称境界条件は、(14)式で  $\phi=0$  であるから、 $\phi_o = \phi_k$  とすることで満足させられる。

### 3.3 Delaunay系の性質

第2(c)図に示すように、Delaunayの三角形a-b-o, b-c-o, c-a-oが組み合わさって三角形a-b-cを形成し、Delaunayの三角形a-b-o, b-c-o, c-a-oの外心を結んで得られるVoronoi多角形(この場合は三角形)i-j-kを考える。Delaunayの三角形の共通の頂点oがVoronoiの多角形i-j-kの外心に位置するとき(この場合の点oは三角形a-b-cの垂心となる)、 $\phi_a, \phi_b, \phi_c$  がそれぞれ(7a), (7b), (7c)式で表わされるとすれば、次式が成り立つ。

$$\begin{aligned} & \tan \alpha (\phi_a - \phi_o) + \tan \beta (\phi_b - \phi_o) + \tan \gamma (\phi_c - \phi_o) \\ &= S_v \left( \frac{\partial^2 \phi_o}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_o}{\partial y^2} \right), \end{aligned} \quad (15)$$

ここで、 $S_v$  はVoronoiの多角形の面積である。(15)式の関係から、(1)式の支配方程式は次のように離散化される。

$$\int_{S_V} \left[ \lambda \left( \frac{\partial^2 \phi_a}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_a}{\partial y^2} \right) + \sigma \right] dx dy$$

$$= \lambda \left[ \tan \alpha (\phi_a - \phi_o) + \tan \beta (\phi_b - \phi_o) \right. \\ \left. + \tan \gamma (\phi_c - \phi_o) \right] + S_V \sigma \quad (16)$$

(16)式は、Delaunayの三角形の共通の頂点 $o$ がVoronoiの多角形の外心となるとき、すなわちDelaunayの三角形の辺とVoronoiの多角形の辺が互いの垂直二等分線となるとき、(1)式の支配方程式がDelaunayの三角形の頂点に位置するpotentialによってTaylor級数の第3次の項までの精度の範囲で満足されることを意味する。

Voronoi系と同様に、媒質のparameter  $\lambda$ が各Delaunayの三角形で異なる値を持ち、Voronoiの多角形の外心にDelaunayの三角形の頂点が位置しない一般的な場合を考える。第2(c)図で、 $\phi_a$ と $\phi_o$ を結ぶ方向を第2(b)図の $y$ 軸方向と一致させて考えるとすれば、(16)式右辺第1項は、

$$\lambda \tan \alpha (\phi_a - \phi_o) = \lambda \frac{a}{r_a} (\phi_a - \phi_o) = \int_{-b}^c \lambda \frac{\partial \phi}{\partial y} dx \quad (17)$$

と一般化できる。第2(b)図で、節点potential  $\phi_i, \phi_j$ は領域IとIIの境界上に位置するため、(3)式で表わされるflux densityの境界に垂直成分に関する境界条件を満足させる試行関数を導くことは困難である。しかし、(2)式の境界条件を満足する試行関数は容易に導くことが可能で、次式によって与えられる。

$$\phi_d = \frac{\phi_i + \phi_j}{2} + \frac{\phi_i - \phi_j}{a} y \quad (18)$$

(18)式を(17)式に代入すると、

$$\int_{-b}^c \lambda \frac{\partial \phi}{\partial y} dx = \left( \frac{\lambda_1}{2} \cot \alpha_1 + \frac{\lambda_2}{2} \cot \alpha_2 \right) (\phi_i - \phi_j) \quad (19)$$

を得ることができる。(19)式は局所一次元化法における変分原理または部分領域法によって得られた結果と一致する[1-6]。(16)式の他の項も(19)式と同様に、媒質のparameter  $\lambda$ の違い等を想定し一般化することができる。

Delaunay系において、(4)式のNeumann型の境界条件は、第2(b)図で領域Iに対して、

$$\frac{1}{2} \cot \alpha_1 (\phi_i - \phi_j) = \int_{-b}^c \phi dx \quad (20)$$

として満足させられる。(5)式のDirichlet型の境界条件は、(19)式又は(20)式で一定値 $\phi_o$ とすることによって満足させられる。(6)式の対称境界条件は、Delaunay系では節点potentialが境界上に位置するため、常に自動的に満足される。

### 3. 4 双対性

Delaunayの三角形の外心にVoronoiの多角形の頂点が位置し、Delaunayの三角形の辺とVoronoiの多角形の辺が互いに垂直二等分線となるとき、(1)式の支配方程式をDelaunayの三角形の領域について積分すると、Voronoiの多角形の頂点のpotentialを用いて離散化した支配方程式を得ることができる。

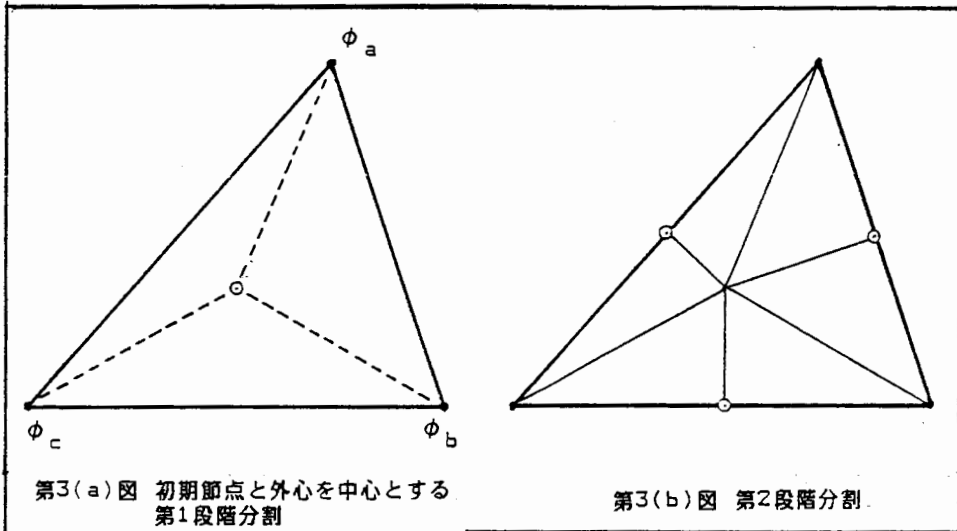
一方、Voronoiの多角形の外心にDelaunayの三角形の頂点が位置し、Voronoiの多角形の辺とDelaunayの三角形の辺が互いの垂直二等分線となるとき、(1)式の支配方程式をVoronoiの多角形の領域について積分すると、Delaunayの三角形を頂点のpotentialを用いて離散化した支配方程式を得ることができる。

幾何学的形状によって決定される節点間のparameterは、Voronoi系とDelaunay系の直交する節点間で互いの逆数となる。したがって、Voronoiの多角形の辺とDelaunayの三角形の辺が互いの垂直二等分線となるとき、Voronoi系とDelaunay系で離散化した

(1) 式の支配方程式は、互いに積分領域が入れかわり、節点間の幾何学的parameterが逆数となる双対性がある。

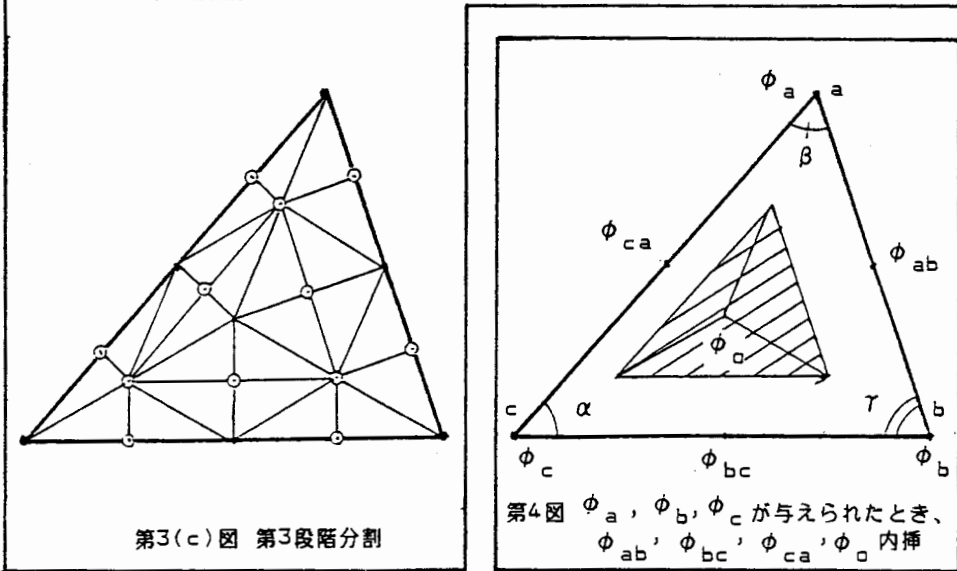
媒質のparameter  $\lambda$  がDelaunayの三角形で異なる値を持つとき、節点間のparameterを電気回路のconductance素子とみなせば、Delaunay系とVoronoi系の節点間のparameterは各領域のconductanceをそれぞれ並列と直列に接続したものに对应することが(13)式と(19)式からわかる。また、この場合の要素間の境界で、Delaunay系は(2)式の境界条件を満たし、(3)式の境界条件を満たさない。逆にVoronoi系は(2)式の境界条件を満たさずに(3)式の境界条件を満たす。

(4)式と(5)式のNeumann型とDirichlet型の境界条件はVoronoi系とDelaunay系は同様に扱われるが、節点間の幾何学的parameterは互いに逆数となる。(6)式の対称境界条件は、Delaunay系では自動的に満足される。Voronoi系では対称な節点間のparameterが零となる。



第3(a)図 初期節点と外心を中心とする第1段階分割

第3(b)図 第2段階分割



第3(c)図 第3段階分割

第4図  $\phi_a, \phi_b, \phi_c$  が与えられたとき、 $\phi_{ab}, \phi_{bc}, \phi_{ca}, \phi_o$  内挿

### 3.5 Pre-Processingへの応用

Pre-processingの最も重要で困難な問題は、最少の数の節点で最高の精度を持つmeshを発生させることである。Voronoi-Delaunayの離散化法では、Voronoiの多角形とDelaunayの三角形の辺が互いの垂直二等分線となると、(1)式の支配方程式を最も精度が高く離散化できることがわかっている。したがって、V-D法における最適meshの発生手順は、全部同じ正三角形、二等辺三角形または直角三角形となるDelaunay系のmeshを発生させることである。これを実行するには、各種の技法が考えられるが、本稿では言及しない。

境界部分の幾何学的形状が複雑であるため、Delaunayの三角形が第3(a)図のようになり、精度を向上させるために節点を増加する場合を考える。この場合の節点配置の判断基準は、節点数の増加は同一の正三角形、二等辺三角形または直角三角形を増加することである。Delaunayの三角形の外心に位置するVoronoiの頂点をDelaunayの三角形の頂点とすれば、二等辺三角形が形成される。さらに、Delaunayの三角形の辺とVoronoiの多角形の辺の交点をDelaunayの三角形の節点とすれば、第3(a)図の三角形は第3(b)図のように直角三角形の組み合わせで表わされる。第3(b)図に対して同様な分割を行えば第3(c)図を得る。以後同様な過程を繰り返せば、三種類の同一の直角三角形だけの分割となる。

### 3.6 Post-Processingへの応用

Post-processingにおける最も重要な問題は、連続空間上の離散化した位置のpotentialの値からいかに正確な等potential線を描くかである。本稿では、Voronoi系に対する(10)式とDelaunay系に対する(16)式を用いて空間を内挿する方法を提案する。第4図でDelaunayの節点a, b, cのpotential  $\phi_a, \phi_b, \phi_c$ が求まった場合、Delaunayの三角形の各辺の中点のpotential  $\phi_{ab}, \phi_{bc}, \phi_{ca}$ は、(18)式を考慮して、次式で与えられる。

$$\phi_{ab} = \frac{1}{2} (\phi_a + \phi_b) \quad (21a)$$

$$\phi_{bc} = \frac{1}{2} (\phi_b + \phi_c) \quad (21b)$$

$$\phi_{ca} = \frac{1}{2} (\phi_c + \phi_a) \quad (21c)$$

(21a)~(21b)式を使って、三角形a-b-cの外心のpotential  $\phi_o$ は、(10)式を考慮すれば、次式で与えられる。

$$\phi_o = \frac{[\phi_{ab} \tan \alpha + \phi_{bc} \tan \beta + \phi_{ca} \tan \gamma + S \sigma]}{[\tan \alpha + \tan \beta + \tan \gamma]} \quad (22)$$

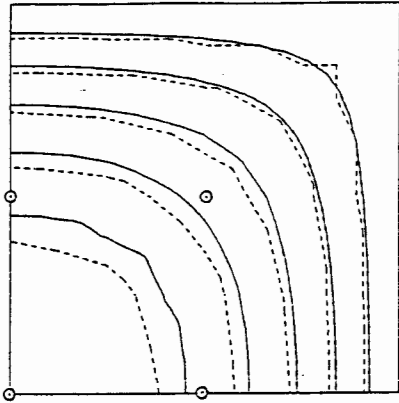
ここで、Sは第4図の斜線部分の面積で、三角形a-b-cの面積の1/4に等しい。以後、同様に三角形の頂点間の中点は、(21a)~(21c)式のように線形補間で得る。得られた中点のpotentialを使って、(22)式と同様な補間を行なって外心のpotentialを得る。このようにして得られた点を使って等potential線を描くことができる。以上の方法は、単に滑らかな内挿をする技術でなく、(1)式の支配方程式を陽的な形で解いているために良好なpotential分布が可能となる。

### 3.7 例題

具体的な例として文献[6]で計算された例を取り上げる。強磁性体にとり囲まれた正方形導体内の磁界分布を算定する問題である。電流は均一に分布し、正方形の導体であるから全導体の1/4部分を計算対象とした。計算対象は正方形であるからDelaunayの三角形がすべて同じ直角三角形となる最適meshを発生できる。Post-processingの例として、計算対象領域の4点がそれぞれDelaunay系およびVoronoi系から計算された場合を考える。

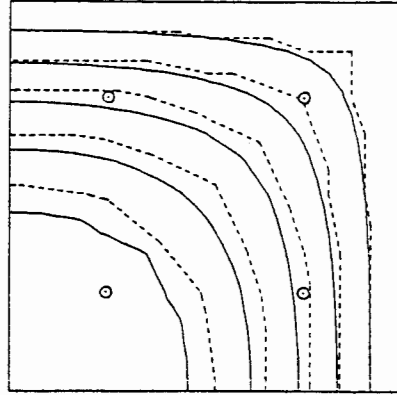


—— 解析解  
 - - - 内挿



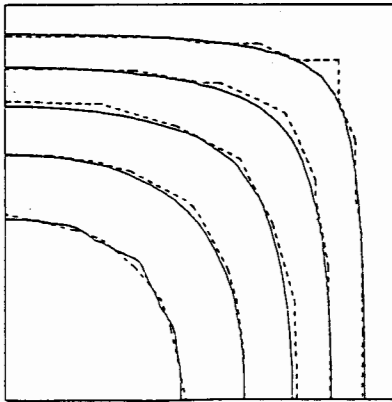
第5(a)図 Delaunay系の4点(O印)の potential から12点補間し、全体として16点から求めた等potential線

—— 解析解  
 - - - 内挿



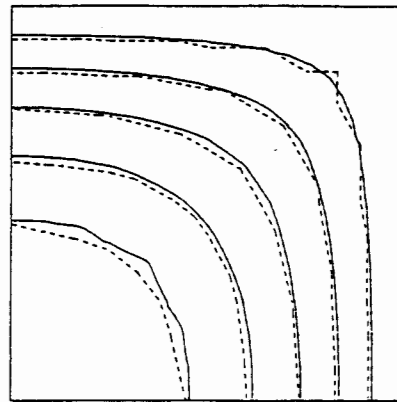
第5(b)図 Voronoi系の4点(O印)の potential から12点補間し、全体として16点から求めた等potential線

—— 解析解  
 - - - 合成



第5(c)図 Delaunay系[第5(a)図]と Voronoi系[第5(b)図]を合成して得た等potential線

—— 解析解  
 - - - FEM



第5(d)図 16節点を使った有限要素法による等potential線

第5(a)図に示すように、Delaunay系の節点12点補間し、全体として16節点のpotentialから等potential線が描かれる。同様に、Voranoi系の節点12点補間し、全体として16節点のpotentialから第5(b)図に示す等potential線が描かれる。第5(a)図と第5(b)図の結果は、互いに誤差が逆の傾向を持つことがわかる。したがって、両者の平均から等potential線を描くと第5(c)図となり、Voranoi系とDelaunay系の両者に基づく内挿結果は極めてよく解析解と一致する。比較のために、第5(d)図に16節点を直接有限要素法で求めて得られた等potential線が示してある。第5(c)図の結果は第5(d)図と比較して、勝るとも劣らない精度を有することがわかり、本稿の方法は内挿というよりも実質的に支配方程式を解くことに近い結果を与えることが示される。

#### 4. 結言

本稿では、Voranoi-Delaunay線図の性質を吟味し、その結果、Voranoi系およびDelaunay系における最適meshが明らかとなった。また、Voranoi系とDelaunay系の内挿方法が見い出され、具体的な問題に応用した結果は単なる内挿と考えるよりもむしろ実質的に支配方程式を陽的に解く事に相当することが示された。

#### 参考文献

- [1] 齊藤 他, "Voranoi-Delaunay離散化法による磁界計算 その1," MAG-85-62, 電気学会マグネティックス研究会資料昭和60年7月18日.
- [2] 齊藤 他, "Voranoi-Delaunay離散化法による磁界計算 その2," MAG-85-63, 電気学会マグネティックス研究会資料昭和60年7月18日.
- [3] 齊藤 他, "Voranoi-Delaunay離散化法による磁界計算 その3," MAG-85-151, 電気学会マグネティックス研究会資料昭和60年11月14日.
- [4] 齊藤 他, "Voranoi-Delaunay離散化法による磁界計算 その4," MAG-85-152, 電気学会マグネティックス研究会資料昭和60年11月14日.
- [5] 齊藤 他, "双対mesh法による高速field計算," MAG-85-176, 電気学会マグネティックス研究会資料昭和60年12月19日.
- [6] Y.Saito and et al, IEEE Trans.Magnetics, to be published in September 1986.