

## 磁化特性のモデリング Modeling of Magnetization Characteristics

### その2. 新 Chua 型モデルとその基本特性

斎藤兆古 , 早野誠治 , 福島一弘 , 高橋和正 , 木住野泰光  
Y. Saito , S. Hayano , K. Fukushima , K. Takahashi and Y. Kishino

法政大学 工学部  
College of Engineering, Hosei University

#### 1. まえがき

第1報で、従来から筆者等の提案していた Chua 型モデルや Preisach 型モデルおよび両者の結合に基づく複合形モデルにおける問題点や適用範囲等について検討を行った [1]。その結果、Chua 型モデルにおいては、高磁束密度領域で良好な磁化特性の再現性を与えることや、Preisach 型モデルにおいては、磁気飽和特性の導入が必要であること、さらに両者の複合モデルにおいては、初期透磁率が無視されること等を明らかにした。

本報では、過去の履歴に影響されない理想磁化曲線と、理想磁化曲線の測定に伴って得られる可逆透磁率および磁気ヒステリシス係数を用いて、新しい Chua 型の磁化特性モデルを導出する。さらに、新 Chua 型モデルと Preisach 型モデルの関係を調べ、両者の複合形モデルを導出する。新しく提案した磁化特性モデルの妥当性を吟味するために、低磁束密度領域における Rayleigh ループ、残留磁気、保磁力、理想磁化および磁気余効等についての再現性さらにその応用の一例として表皮効果に対する磁気ヒステリシスの影響を検討する。

#### 2. 新 Chua 型モデル

##### 2.1. 磁化特性モデルの導出

磁化特性モデルは、その第一前提として、結果として磁気履歴特性を呈示するものであり、モデルを構成するパラメータが磁気履歴特性に影響されることは論外であろう。各種の磁化曲線の中で、過去の磁気履歴に無関係にユニークに決定される磁化曲線は理想磁化曲線（または An hysteretic Magnetization Curve）である。これは、理想磁化曲線が過去の履歴を交流の励磁によって打ち消して得られるためである。理想磁化曲線は次式によって与えられるとする。

$$H = \frac{1}{\mu} B . \quad (1)$$

ここで、透磁率 $\mu$ は、磁束密度 $B$ の一価関数で与えられるものとする。

磁化特性の中で、可逆的な磁化特性を表わすパラメータとして可逆透磁率 $\mu_r$ が知られている。可逆透磁率 $\mu_r$ は、バイアス磁束密度 $B$ 上で、微小磁界 $\Delta H$ の変化に対する微小磁束密度変化 $\Delta B$ の比を考え、微小磁界 $\Delta H$ を零に近づけた場合に得られる。即ち、可逆透磁率 $\mu_r$ は

$$\mu_r = \lim_{\Delta H \rightarrow 0} \frac{\Delta B}{\Delta H}, \quad (2)$$

で定義される。(2)式から得られる可逆透磁率 $\mu_r$ は、それ自身が過去の履歴に依存せず可逆的であっても、バイアス磁束密度 $B$ が過去の履歴に影響される場合は結果として磁気履歴に依存するパラメータとなるため、磁化特性モデルのパラメータとして使用できない。可逆透磁率で過去の磁気履歴に無関係なものは、理想磁化曲線の測定時に得られる可逆透磁率である。

なぜなら、バイアス磁束密度を与える理想磁化特性が、過去の磁気履歴に関係せずユニークに決定されるためである。可逆透磁率は、実質的に微分透磁率に等しいから、

$$dH = \frac{1}{\mu_r} dB, \quad (3)$$

又は、

$$\frac{\mu_r dH}{s} = \frac{dB}{s dt}, \quad (4)$$

が成り立つ。(4)式で、 $s$ は磁気ヒステリシス係数であり、 $\Omega/m$ の次元を持つ。(1)式は、原点からの磁化特性を意味し、(4)式は理想磁化曲線上での微小部分の磁化特性を意味するから、(1)式と(4)式の和である次式

$$H + \frac{\mu_r}{s} \frac{dH}{dt} = \frac{1}{\mu} B + \frac{dB}{s dt}, \quad (5)$$

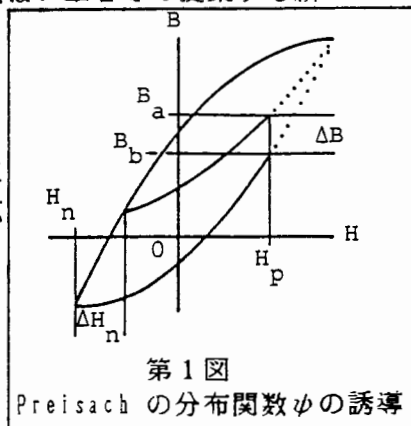
は全体の磁化特性を表わす[2]。(5)式は、筆者等の提案する新 Chua 型モデルである。

## 2.2. Preisach 型モデルとの関係

Preisach の分布関数は、現時点での磁界を $H_p$ 、反転時の磁界を $H_n$ とすれば次式で表わされる[1]。

$$\psi = \frac{\partial^2 B(H_p, H_n)}{\partial H_n \partial H_p}. \quad (6)$$

(5)式と(6)式の関係調べるため、



第1図

Preisach の分布関数 $\psi$ の誘導

第1図の磁界  $H_p$  における磁化状態を(5)式で表わすと、

$$H_p + \frac{\mu_r}{s} \frac{dH_p}{dt} = \frac{1}{\mu} B_a + \frac{1}{s} \frac{dB_a}{dt}, \quad (7)$$

$$H_p + \frac{\mu_r}{s} \frac{dH_p}{dt} = \frac{1}{\mu} B_b + \frac{1}{s} \frac{dB_b}{dt}, \quad (8)$$

となる。第1図で、 $\Delta B$ が充分小さく、(7)、(8)式の透磁率 $\mu$ 、可逆透磁率 $\mu_r$ およびヒステリシス係数 $s$ は両式で等しいと仮定し、(7)式から(8)式を引き算し変形すると、次式が得られる。

$$s = \frac{\frac{\partial B_b}{\partial H_p} - \frac{\partial B_a}{\partial H_p}}{\frac{1}{\mu}(B_a - B_b)} \cdot \frac{\partial H_p}{\partial t} = \frac{\frac{\partial B_b}{\partial H_p} - \frac{\partial B_a}{\partial H_p}}{\frac{1}{\mu} \Delta B} \cdot \frac{\partial H_p}{\partial t}, \quad (9)$$

ここで、第1図の $\Delta H_n$ が零に近づくとき、(9)式中の $\Delta B / \mu$ も零に近づくから、 $\Delta H_n$ が充分小さいとき、 $\Delta H_n = \Delta B / \mu$ と仮定すれば、

$$\lim_{\Delta H_n \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial B_b}{\partial H_p} - \frac{\partial B_a}{\partial H_p}}{\frac{1}{\mu} \Delta B} = \frac{\partial^2 B}{\partial H_n \partial H_p}, \quad (10)$$

の関係が得られる。従って、(6)、(9)および(10)式から、磁気ヒステリシス係数 $s$ と Preisach の分布関数 $\psi$ は、 $\partial H_p / \partial t$ を $\partial H / \partial t$ と一般化して、次式で関係づけられる。

$$s = \psi \frac{\partial H}{\partial t}. \quad (11)$$

(11)式を(5)式に代入して、新 Chua 型モデルと Preisach 型モデルの複合型モデルが次式のように与えられる。

$$H + \frac{\mu_r}{\psi} = \frac{1}{\mu} B + \frac{1}{\psi} \frac{dB}{dH}. \quad (12)$$

### 2.3. Rayleigh 範囲の特性

(12)式で、磁束密度が低いために、透磁率 $\mu$ も Preisach の分布関数 $\psi$ も一定値とし、さらに初期磁束密度を零として(12)式を解くと、

$$B = \mu H + \frac{\mu}{\psi} (\mu_r - \mu) (1 - e^{-\frac{\psi}{\mu} H}), \quad (13)$$

となる。(13)式で、磁界 $H$ が極めて小さく、指数部が Taylor 展開の第3項までで近似されるとすれば、(13)式は次式となる。

$$\begin{aligned}
 B &= \mu_r H + \frac{1}{2} \psi H^2 \left(1 - \frac{\mu_r}{\mu}\right), \\
 &= \mu_r H + \frac{1}{2} \psi H^2.
 \end{aligned}
 \tag{14}$$

ここで、可逆透磁率  $\mu_r$  は初期透磁率に等しく、 $\mu \gg \mu_r$  と仮定している。第一報で示したように、Preisach の分布関数  $\psi$  は Rayleigh の定数に等しい [1]。従って、(14) 式は Rayleigh の初期磁化曲線と全く一致する [3]。同様に、(12) 式のパラメータを一定とし、磁束密度の最大値と最小値の絶対値が等しくなる条件で、(12) 式からヒステリシスループを求めると次式のようなになる。

$$\begin{aligned}
 B &= \mu(H_p \pm H_n) \pm \frac{\mu^2}{\psi} \left(1 - \frac{\mu_r}{\mu}\right) \left\{ \epsilon^{\pm \frac{\psi}{\mu} (H_p \pm H_n)} - 1 \right\} \\
 &\quad \mp B_n \epsilon^{\pm \frac{\psi}{\mu} (H_p \pm H_n)}.
 \end{aligned}
 \tag{15}$$

ここで、記号 + と - はそれぞれ上昇と下降曲線に対応し、 $H_p$  は現時点の磁界である。また、 $B_n$  は  $H_n$  を反転時の磁界として

$$B_n = \mu H_n + \left( \mu H_n - \frac{\mu^2}{\psi} + \frac{\mu \mu_r}{\psi} \right) \tanh \frac{\psi}{\mu} H_n,
 \tag{16}$$

で表わされる。(15)、(16) 式で、磁界  $H_p$  と  $H_n$  が充分小さく、指数関数および双曲線関数が Taylor 展開の第 3 項までで近似されとすれば、(15) 式は

$$B = (\mu_r + \psi H_n) H_p \pm \frac{1}{2} \psi (H_p^2 - H_n^2),
 \tag{17}$$

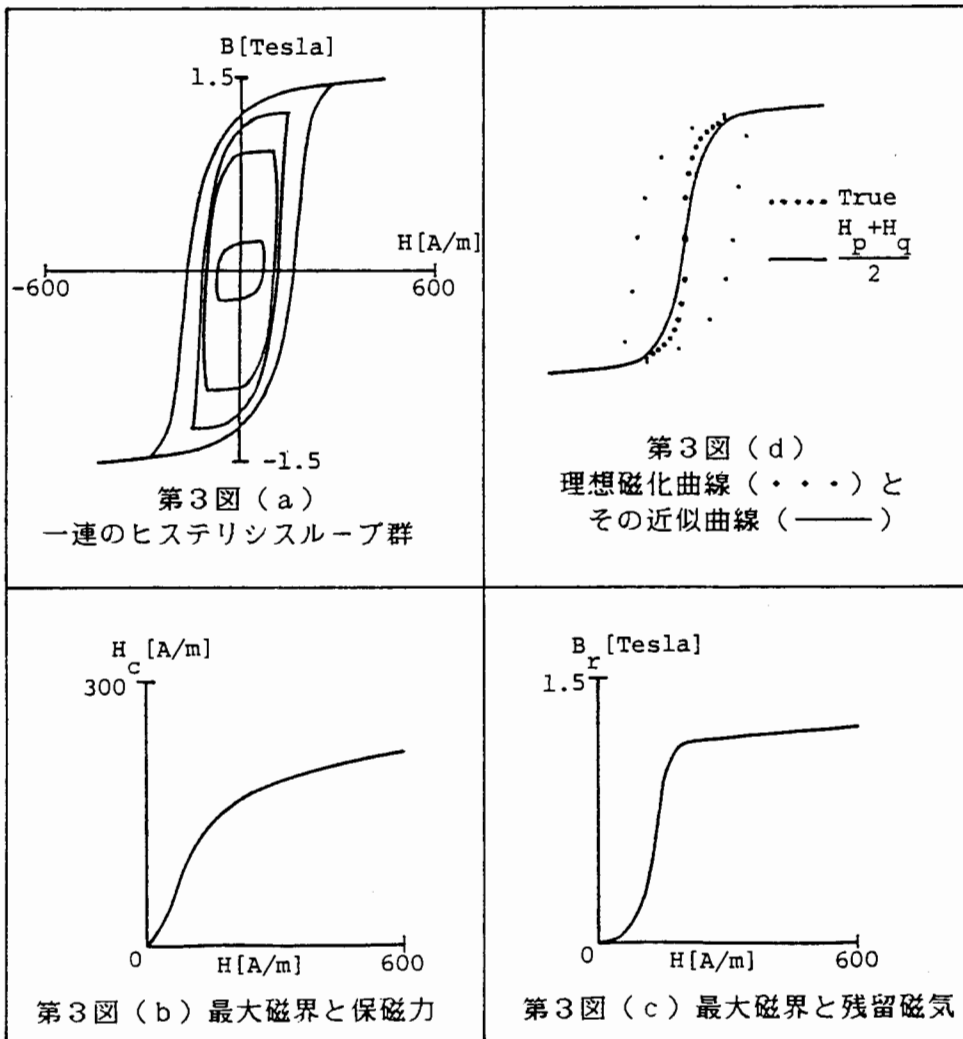
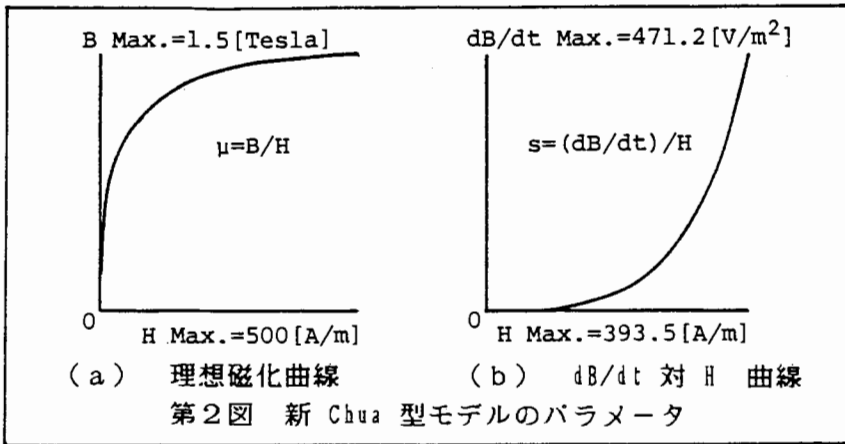
となる。但し、 $\mu \gg \mu_r$  と仮定している。(17) 式は明らかに Rayleigh Loop である [3]。以上の結果から、新 Chua 型モデルと Preisach 型モデルの結合に基づく複合モデル (12) 式は、低磁束密度領域で Rayleigh の関係を全て満足することが示された。

#### 2.4. 高磁束密度領域における特性

高磁束密度領域においては、磁気飽和の影響を考慮しなければならないため、磁化特性モデルのパラメータの非線形性を導入しなければならない。

第 2 図 (a) に、本報告で計算機実験のために採用した理想磁化曲線を示す。同様に、第 2 図 (b) に  $dB/dt$  対  $H$  の曲線を示す。なお、可逆透磁率  $\mu_r$  は、 $\mu_r = 100 \times \mu_0$  ( $\mu_0$  は真空中の透磁率) なる一定値と仮定した。

第 3 図 (a) に、磁界  $H$  が時間  $t$  に対して正弦波状に変化している場合のヒステリシスループ群を示す。第 3 図 (a) から、低磁束密度領域では、Rayleigh Loop に近くなり、微小磁束密度領域では Lens Shape の Loop が



観察され、実際のヒステリシスループ群の性質と良く一致する傾向を持つことが確認される [4]。

ヒステリシスループ群で、各ヒステリシスループの頂点における磁界（磁界の最大値）に対する保持力の関係を調べると、一種の飽和曲線となることが知られている [4]。この関係を第3図 (a) から求めた結果が、第3図 (b) に示してある。第3図 (b) の結果は、極めて良く実際の傾向を再現している。同様な関係は残留磁気にも成り立ち、第3図 (c) に示すように、最大磁界に対して残留磁気も飽和特性を示す [4]。第3図 (c) の結果も実際の傾向を良く再現している。

Bozorth によれば、理想磁化曲線はヒステリシスループ上で、上昇曲線と下降曲線の同一磁束密度に対する磁界の平均値をトレースした曲線と良く一致するとされている [4]。この関係を解析的に調べるため、(12) 式のパラメータ  $\mu$ ,  $\mu_r$ ,  $\psi$  を一定値と仮定し、上昇曲線と下降曲線で同一磁束密度に対応する磁界をそれぞれ  $H_p$  と  $H_n$  とすれば、次式が成り立つ。

$$H_p + \frac{\mu_r}{\psi} = \frac{B}{\mu} + \frac{1}{\psi} \frac{dB}{dH_p}, \quad (18)$$

$$H_q - \frac{\mu_r}{\psi} = \frac{B}{\mu} - \frac{1}{\psi} \frac{dB}{dH_q}. \quad (19)$$

(18) 式と (19) 式に、それぞれ (15) 式の上昇曲線と下降曲線を代入し、両式の平均を取ると、

$$\begin{aligned} \frac{H_p + H_q}{2} &= \frac{1}{\mu} B + \frac{1}{2\psi} \left( \frac{dB}{dH_p} - \frac{dB}{dH_q} \right) \\ &= \frac{1}{\mu} B + \frac{\epsilon^{-\frac{\psi}{\mu} H_n}}{2\psi} \left( \epsilon^{\frac{\psi}{\mu} H_q} - \epsilon^{-\frac{\psi}{\mu} H_p} \right) \left\{ \mu \left( 1 - \frac{\mu_r}{\mu} \right) + \frac{\psi}{\mu} B_n \right\}, \quad (20) \end{aligned}$$

を得る。(20) 式から、 $H_p = -H_q$  の場合は当然であるが、反転時の磁界  $H_n$  が充分大きいとき、即ち充分大きなヒステリシスループであれば、

$$\frac{H_p + H_q}{2} = \frac{1}{\mu} B, \quad (21)$$

が成り立ち、Bozorth の指摘が成り立つことが確認される。第3図 (a) の最大ヒステリシスループの同一磁束密度に対応する上昇曲線と下降曲線それぞれの磁界の平均値をトレースした曲線と、第2図 (a) の理想磁化曲線を、第3図 (d) に示してある。第3図 (d) の結果は、Bozorth の指摘が正しいことを良く示している。

## 2.5. 磁気余効特性

磁化特性の中で重要なものとして、磁気余効がある。特に、磁気記録に

おいては、書き込み速度や記録の再現性に直接関係するため重要である。

磁気余効には、磁界を印加した場合と磁界を取り去った場合とがある。

また、磁気余効特性には、磁束密度が時間に対して指数関数的に変化する  
場合や時間の対数に比例して変化する場合がある [3] 。

第4図 (a) に、磁界 H を取り去った場合の計算例を示してある。

第4図 (a) の結果は明らかに Richter 型の磁気余効の傾向を示している [3] 。

第4図 (b) に、階段状の磁界が印加された場合の計算例を示してある。

第4図 (c) に、第4図 (b) で磁束密度が最終値 (時間  $t = 0.1$  秒) の 90% に達するまでの時間の逆数を縦軸とし、印加磁界を横軸としたものを描いてある。

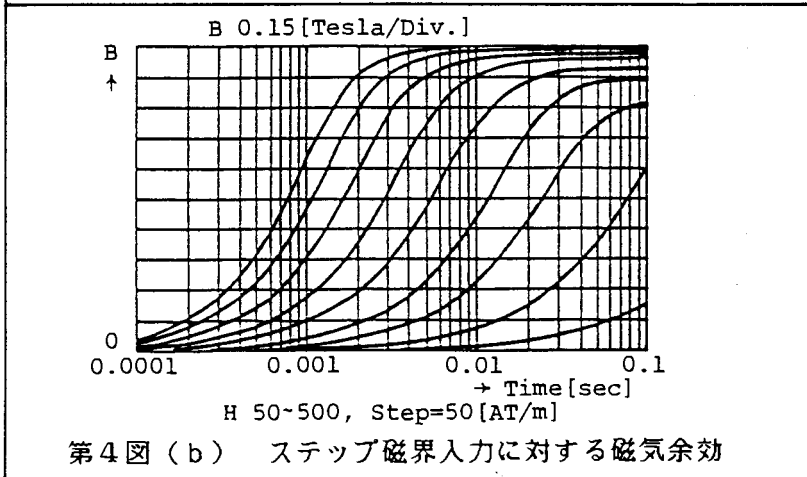
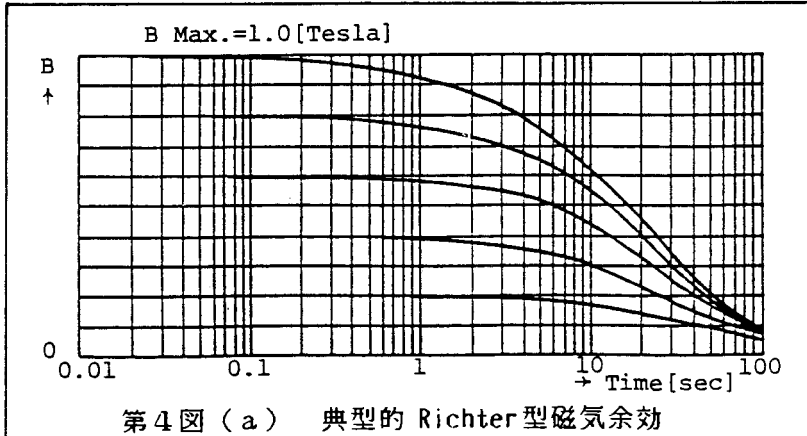
第4図 (c) の結果は、第2図 (b) に示してある  $dB/dt$  対 H の曲線と類似している。

ここで、(5) 式において階段状磁界が印加された直後を考えると、次式が成り立つ。

$$Hu(t) + \frac{\mu_r}{s} H \delta(t) = \frac{1}{\mu} B + \frac{dB}{s dt} = \frac{dB}{s dt} \quad (22)$$

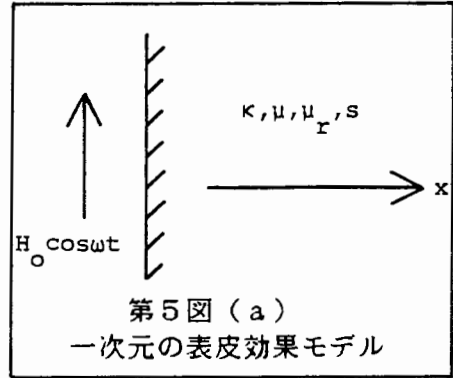
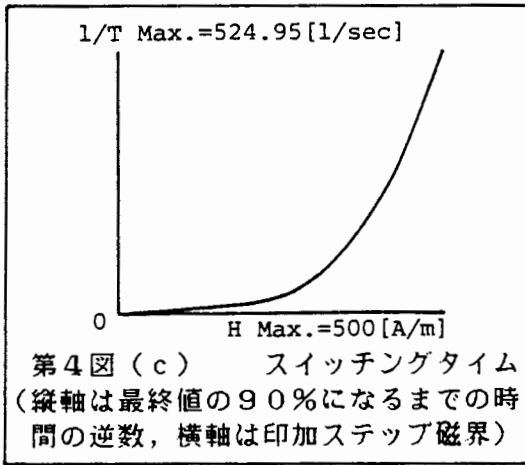
ここで、 $u(t)$  は単位ステップ関数、 $\delta(t)$  はデルタ関数である。

(22) 式の系の固有値は  $s/\mu$  であり、磁界の印加直後は、印加磁界の



大部分は(22)式に示されているように(1/s) dB/dtにかかる。

第2図(b)を観察すれば、dB/dtが大きくなる程sも大きくなり、従って系の固有値s/μも大きくなり、結果として磁束密度Bの立ち上がりも早くなる。以上のことから、第4図(c)の曲線は第2図(b)と類似した曲線となることが理解される。さらに、第4図(c)の曲線はBozorth等の測定した印加磁界に対する磁束の伝播速度の曲線とも極めて類似した曲線となっている[4]。これは、第4図(c)の縦軸が単位長当りの速度とみなせるから、第4図(c)はBozorth等の実験結果を良く再現していると考えられる。以上の結果から、第2図(b)はスイッチング速度に極めて深い関係を有する曲線であり、ヒステリシス係数sの大きさはスイッチング速度を表わすパラメータと考えられる[5]。



## 2.6. 楕円近似モデル

(5)式で与えられる新 Chua 型モデルは、パラメータである $\mu$ ,  $\mu_r$ ,  $s$ を一定値としたとき、ヒステリシスループを楕円近似したモデルとなる。

ここでは、この楕円近似モデルを用いて、磁気ヒステリシスの表皮効果に与える影響を調べてみる。

低周波数領域における電磁界を支配する方程式は、

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}, \quad (23)$$

$$\nabla \times H = J, \quad (24)$$

$$J = \kappa E, \quad (25)$$

である。ここで、Eは電界ベクトル、Jは電流密度ベクトル、 $\kappa$ は導電率である。(23) - (25)式より、

$$\nabla \times \nabla \times H = -\kappa \frac{\partial B}{\partial t}, \quad (26)$$



$$\nabla \times \nabla \times \frac{\partial H}{\partial t} = -\kappa \frac{\partial^2 B}{\partial t^2}, \quad (27)$$

を得る。また、(5)式から、

$$\nabla \times \nabla \times H + \frac{\mu_r}{s} \nabla \times \nabla \times \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \nabla \times B + \frac{1}{s} \nabla \times \nabla \times \frac{\partial B}{\partial t}, \quad (28)$$

が成り立つ。(28)式に(26)、(27)式を代入し、 $\nabla \cdot B = 0$ の条件より、次式が得られる。

$$\nabla^2 B + \frac{\mu}{s} \nabla^2 \frac{\partial B}{\partial t} = \kappa \mu \frac{\partial B}{\partial t} + \kappa \frac{\mu_r}{s} \frac{\partial^2 B}{\partial t^2}. \quad (29)$$

(29)式は、磁気ヒステリシスを考慮した支配方程式である。(29)式を、第5図(a)のような一次元問題に対して解くと、

$$B = \mu H_0 \sqrt{\frac{s^2 + (\omega \mu_r)^2}{s^2 + (\omega \mu)^2}} \varepsilon^{-\sqrt{W}x} \cos\{\omega t - \sqrt{Y}x - \tan^{-1} \frac{\omega \mu}{s} + \tan^{-1} \frac{\omega \mu_r}{s}\}, \quad (30)$$

となる。ここで、WとYは

$$W = \frac{\omega \kappa \mu}{2(s^2 + \omega^2 \mu^2)} \{ \omega(\mu - \mu_r)s + \sqrt{[\omega(\mu - \mu_r)s]^2 + [s^2 + \omega^2 \mu \mu_r]^2} \}, \quad (31)$$

$$Y = \frac{\omega \kappa \mu}{2(s^2 + \omega^2 \mu^2)} \{ -\omega(\mu - \mu_r)s + \sqrt{[\omega(\mu - \mu_r)s]^2 + [s^2 + \omega^2 \mu \mu_r]^2} \}, \quad (32)$$

であり、境界条件は、 $x = 0$ で $H = H_0 \cos \omega t$ 、 $x \rightarrow \infty$ で $H = 0$ としている。また、境界Hは(30)式を(5)式に代入して次式で与えられる。

$$H = H_0 \varepsilon^{-\sqrt{W}x} \cos(\omega t - \sqrt{Y}x). \quad (33)$$

(30)式と(33)式を用いて、導体中のヒステリシスループを描くと第5図(b)のようになる。第5図(b)から、ヒステリシスループが楕円で近似され、導体中に深くなる程ループが小さくなることが観察される。

Skin depth  $S_d$ は、(30)式から

$$S_d = \frac{1}{\sqrt{W}}, \quad (34)$$

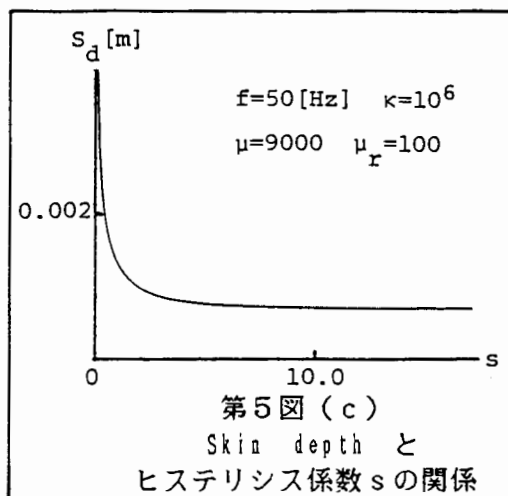
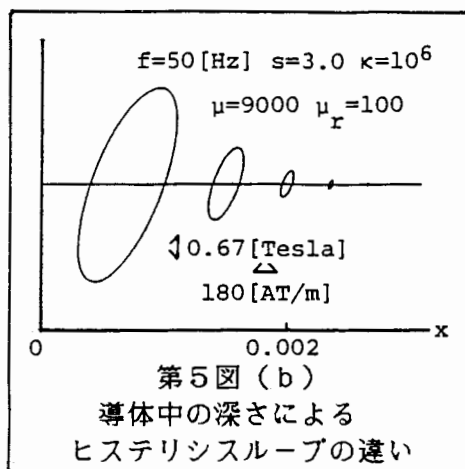
で与えられる。(34)式で、磁気ヒステリシス係数sのSkin depth  $S_d$ に対する影響を調べると、次式のようになる。

$$s \rightarrow \infty, \quad S_d = \sqrt{\frac{2}{\omega \kappa \mu}}, \quad (35)$$

$$s \rightarrow 0, \quad S_d = \sqrt{\frac{2}{\omega \kappa \mu_r}}. \quad (36)$$

(35)式は、磁気ヒステリシスが存在しない場合を意味し、(36)式は、磁気ヒステリシスが系を支配しているケースを意味し、 $\mu_r < \mu$ である

から磁気ヒステリシスは Skin depth を深くすると考えられる。以上の結果を第5図(c)に示す。



### 3. 結論

本報告では、過去の磁気履歴に関係しないパラメータである理想磁化曲線の透磁率と、理想磁化曲線の測定に伴なって得られる可逆透磁率さらにスイッチング特性に大きく関係するヒステリシス係数を用いて、新 Chua 型モデルを導いた。新 Chua 型モデルと Preisach 型モデルの関係を調べ、両者の複合モデルを導出した。この複合モデルを用いて、低磁束密度領域を吟味した結果、Rayleigh の関係式が導びかれた。さらに、磁化特性の基本であるヒステリシスループの形状、理想磁化曲線との関係、磁気余効特性等について吟味した。その結果、新 Chua 型モデルは各種特性の十分な再現性を有することが確認できた。さらに、応用の一例として、表皮効果に対する磁気ヒステリシスの影響を楕円モデルを用いて調べ、磁気ヒステリシスは Skin depth を深くする作用を有することが示された。

### 参 考 文 献

- [1] 斎藤 他, 「磁化特性のモデリング その1. Chua 型モデルと Preisach 型モデルの検討」, 電気学会マグネティックス研究会資料, 1986年10月, 岩手.
- [2] Y. Saito and et al, IEEE Trans., Magnetics, in printing.
- [3] S. Chikazumi and et al, Physics of Magnetism (John Wiley and Sons, 1964).
- [4] R. M. Bozorth, Ferromagnetism (Van Nostrand, 1951).
- [5] M. Prutton, Thin Ferromagnetic Films (Butterworth, 1964).