

Voronoi-Delaunay の離散化法による磁界計算
(その4. うず電流を生ずる系の磁界解析)

齊藤兆古，木住野泰光，早野誠治，中村秀男，津屋 昇
(法 政 大 学)

1985年11月14日

社 団 電 気 学 会
法 人

東京都千代田区有楽町1-12-1

Voronoi-Delaunayの離散化法による磁界計算

その4. うず電流を生ずる系の磁界解析

Magnetic Fields Computation
by Voronoi-Delaunay Discretization

齊藤兆古、木住野泰光、早野誠治、中村秀男、津屋昇
Y.Saito, Y.kishino, S.Hayano, H.Nakamura, N.Tsuya

法政大学 工学部
College of Engineering, Hosei University

1. まえがき

デジタル計算機を用いて、磁界計算を効率よく行なうために筆者等は、Voronoiの多角形とDelaunayの三角形の幾何学的特性と相反変分原理に基づく離散化法を提唱した。筆者等の提唱するVoronoi-Delaunayの離散化法は、静的な磁界を計算する場合、従来の単純な三角形一次要素を使用する有限要素法よりも圧倒的に高速な計算を可能にすることが報告されている[1,2]。

本報告では、うず電流分布が問題となる動磁界系について、Voronoi-Delaunayの離散化法の適応性を吟味する。

具体的な例題として、塊状鉄心からなるトロイダルリアクトル中の動磁界について計算を行う。

2. 基礎方程式

電磁界を支配する方程式は、

$$\nabla \times \bar{E} = - \frac{\partial \bar{B}}{\partial t}, \quad (1)$$

$$\nabla \times \bar{H} = \bar{J}, \quad (2)$$

ここで、 \bar{E} , \bar{J} , \bar{B} , \bar{H} はそれぞれ、電界、電流密度、磁束密度、磁界ベクトルである。電界ベクトル \bar{E} と電流密度ベクトル \bar{J} の関係は、 ρ を材料の抵抗率として、次式で与えられる。

$$\bar{E} = \rho \bar{J} \quad (3)$$

さらに、磁束密度ベクトル \bar{B} と磁界の強さ \bar{H} の関係は、

$$\bar{H} = \frac{1}{\mu} \bar{B} + \frac{1}{s} \frac{\partial \bar{B}}{\partial t}, \quad (4)$$

で与えられる。ここで、 μ と s は材料の透磁率とヒステリシス係数である[3,4]。

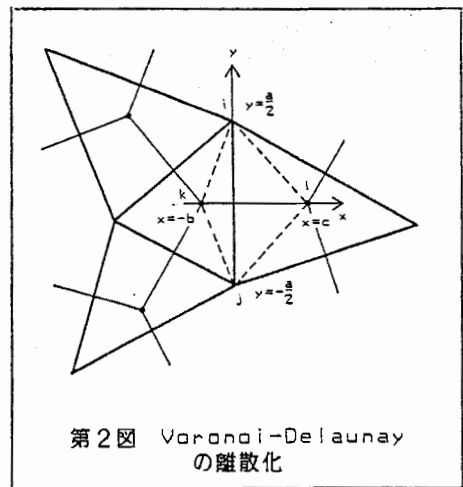
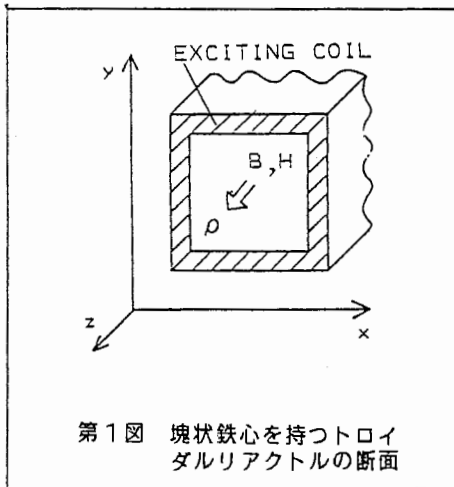
(1)-(3)式より、拡散方程式を導くことができる。

$$\rho \nabla \times \nabla \times \bar{H} = - \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \quad (5)$$

一般にトロイダルリアクトルにおいて、鉄心からの漏れ磁束は極めて小さく無視できることが知られている。従って、第1図に示してあるように、トロイダルリアクトルの動磁界を計算する場合、磁界ベクトル \bar{H} と磁束密度ベクトル \bar{B} のz方向成分のみを(5)式で考えればよいことになる。よって(5)式は、

$$\rho \frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial x^2} + \rho \frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial y^2} = \frac{\partial \bar{B}}{\partial t}, \quad (6)$$

となる。



3. Voronoi-Delaunayの離散化法

<3.1> Voronoi-Delaunay線図

いま、第1図に示されているコアの断面が第2図に示すように三角形要素に離散化されたものとする。各三角形の外心を結ぶ線分は三角形の頂点を結ぶ辺を垂直に二等分し、三角形の頂点をとり囲む多角形を形成する。この多角形をVoronoiの多角形と称し、このときの三角形をDelaunayの三角形と呼ぶ[5]。第2図で、節点*i, j, k, l*にとり囲まれる四辺形領域を考えると、三角形の外心*k, l*を結ぶ*x*方向の試行関数と三角形頂点*i, j*を結ぶ*y*方向の試行関数は、直交性と*y*方向の対称性から互に独立となる。従って、他の領域についても第2図中の節点*i, j, k, l*で囲まれる四辺形要素と同様な要素を考えれば、全体として、三角形の頂点を節点とする系と三角形の外心を結ぶ系に分離される。前者をDelaunay系、後者をVoronoi系と呼ぶこととする。

<3.2> 節点方程式

第2図で、節点*i, j*間の試行関数*H_p*は

$$H_p = \frac{H_i + H_j}{2} + \frac{H_i - H_j}{a} y \quad , \quad (7)$$

で与えられる[1]。(6)式に(7)式の試行関数を代入し、残差にステップ関数の重みを掛算し、節点*j, k, l*で囲まれる領域について積分し、変形すると、

$$\left(\rho_a^b + \rho_a^c\right) (H_j - H_i) + \int_{-\frac{a}{2}}^0 \int_{-b}^c \frac{\partial B}{\partial t} dx dy = 0 \quad , \quad (8)$$

を得ることができる。他の節点*i*に関する節点方程式も同様にして得ることができる。

第2図で、節点*k, l*間の試行関数*H_c*は

$$H_c = \frac{1}{\left(\frac{\rho}{b} + \frac{\rho}{c}\right)} \left\{ \frac{\rho}{b} H_k + \frac{\rho}{c} H_l + (H_l - H_k) \rho \frac{x}{bc} \right\} \quad , \quad (9)$$

で与えられる[1]。(6)式に(9)式の試行関数に代入し、残差にステップ関数の重みを掛算し、節点*i, j, k*で囲まれる領域について積分し、変形すると、

同様に(10)式も次のように変形する事ができる。

$$\left(\frac{1}{\frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}}\right)(i_k - i_l) + \frac{\partial \phi_{k1}}{\partial t} = 0 \quad , \quad (13)$$

ここで、

$$i_k = H_k \cdot \Delta z \quad , \quad i_l = H_l \cdot \Delta z \quad ,$$

$$\phi_{k1} = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-b}^0 B \, dx \, dy \quad , \quad (14)$$

である。いま、節点kを取り囲むDelaunayの三角形全体の面積を通過する磁束を ϕ_k とすれば、第3(b)図のようなVoronoi系に対するうず電流の等価回路を得る。

<3.4> 磁気回路

節点jを取り囲むVoronoiの多角形全体の面積を ΔS_j とすれば、(4)式から

$$i_j + ni_e = M_j \phi_j + N_j \frac{\partial \phi_j}{\partial t} \quad , \quad (15)$$

の磁気回路方程式を得ることができる。ここで、

n : 励磁コイル巻数、 i_e : 励磁電流、

$$M_j = \frac{\Delta z}{\mu \cdot \Delta S_j} \quad , \quad N_j = \frac{\Delta z}{s \cdot \Delta S_j} \quad , \quad (16)$$

とする。

節点kを取り囲むDelaunayの三角形全体の面積を ΔS_k とすれば、

$$i_k + ni_e = M_k \phi_k + N_k \frac{\partial \phi_k}{\partial t} \quad , \quad (17)$$

の磁気回路方程式を得ることができる。ここで、

$$M_k = \frac{\Delta z}{\mu \cdot \Delta S_k}, \quad N_k = \frac{\Delta z}{s \cdot \Delta S_k}, \quad (18)$$

とする。(15)式は、Delaunay系の節点Jに対する磁気回路方程式であり、(17)式は Voronoi系の節点kに対する磁気回路方程式である。

4. 時間の離散化

(11)式のDelaunayまたは(13)式のVoronoi系の節点方程式、どちらにおいても全体としてのSystem Equationは、電気抵抗を要素とする電気抵抗行列R、電流を要素とする電流ベクトルI、磁束を要素とする磁束ベクトルΦを用いて、

$$RI + W\left(\frac{d}{dt}\right)\Phi = V, \quad (19)$$

と書ける。但しWは励磁コイルに対してn、うず電流経路に対しては1の値を取る巻数行列であり、Vは励磁コイルに対しては電源電圧e、他は0の値を取る電圧ベクトルである。さらに、(15)式のDelaunay系または(17)式のVoronoi系の磁気回路方程式、どちらにおいても全体としてのSystem Equationは、磁気抵抗を要素とする磁気抵抗行列M、磁気ヒステリシスパラメータ(N_J又はN_k)を要素とする磁気ヒステリシス行列Nを用いて、

$$W^T I = M\Phi + N\left(\frac{d}{dt}\right)\Phi, \quad (20)$$

と書ける。ここで上添字Tは行列の転置を示し、MとNは対角行列である。

(19)式と(20)式から、全体としてのSystem Equationは

$$W^T R^{-1} V = M\Phi + (W^T R^{-1} W + N)\left(\frac{d}{dt}\right)\Phi, \quad (21)$$

が得られる。(21)式で上添字-1は逆行列を示す。(21)式は、時間tに対して次のように離散化される。

$$W^T R^{-1} V_{t+(\Delta t/2)} = M_{t+(\Delta t/2)} \left(\frac{1}{2}\right) [\Phi_{t+\Delta t} + \Phi_t] + [W^T R^{-1} W + N]_{t+(\Delta t/2)} \left(\frac{1}{\Delta t}\right) [\Phi_{t+\Delta t} - \Phi_t], \quad (22)$$

ここで、Δtは時間のきざみ幅を示す。下添字t, t+Δt, t+(Δt/2)はそれぞれ時間 t, t+Δt, t+(Δt/2)を示す。磁気抵抗行列Mの要素である磁気抵抗は、透磁率の関数であり、透磁率μは磁束密度Bの関数である。また磁気ヒステリシス行列の要素である磁気ヒステリシスパラメータは磁気ヒステリシス係数sの関数であり、磁気ヒステリシス係数sは磁束密度の時間微

分dB/dtの関数である。(22)式はこれらの非線形性を考慮して離散化されている。

5. 計算例

計算に使用した諸定数を第1表に示す。最初に、Voronoi-Delaunay離散化法の収束性を吟味するために、磁気ヒステリシスは無いものとし、比透磁率を $\mu_r=1000$ とした線形な系を仮定し、電源電圧を直流のステップ入力としたときのコア全体の全磁束の応答を第4(a)図に示す。また、この場合のコア断面における磁束密度の分布を第4(b)図に示す。

二番目に非線形性を吟味するために、磁気ヒステリシスは無く、非線形の透磁率の系を仮定し、直流ステップ入力に対するコア全体の全磁束の応答を第4(c)図に示す。

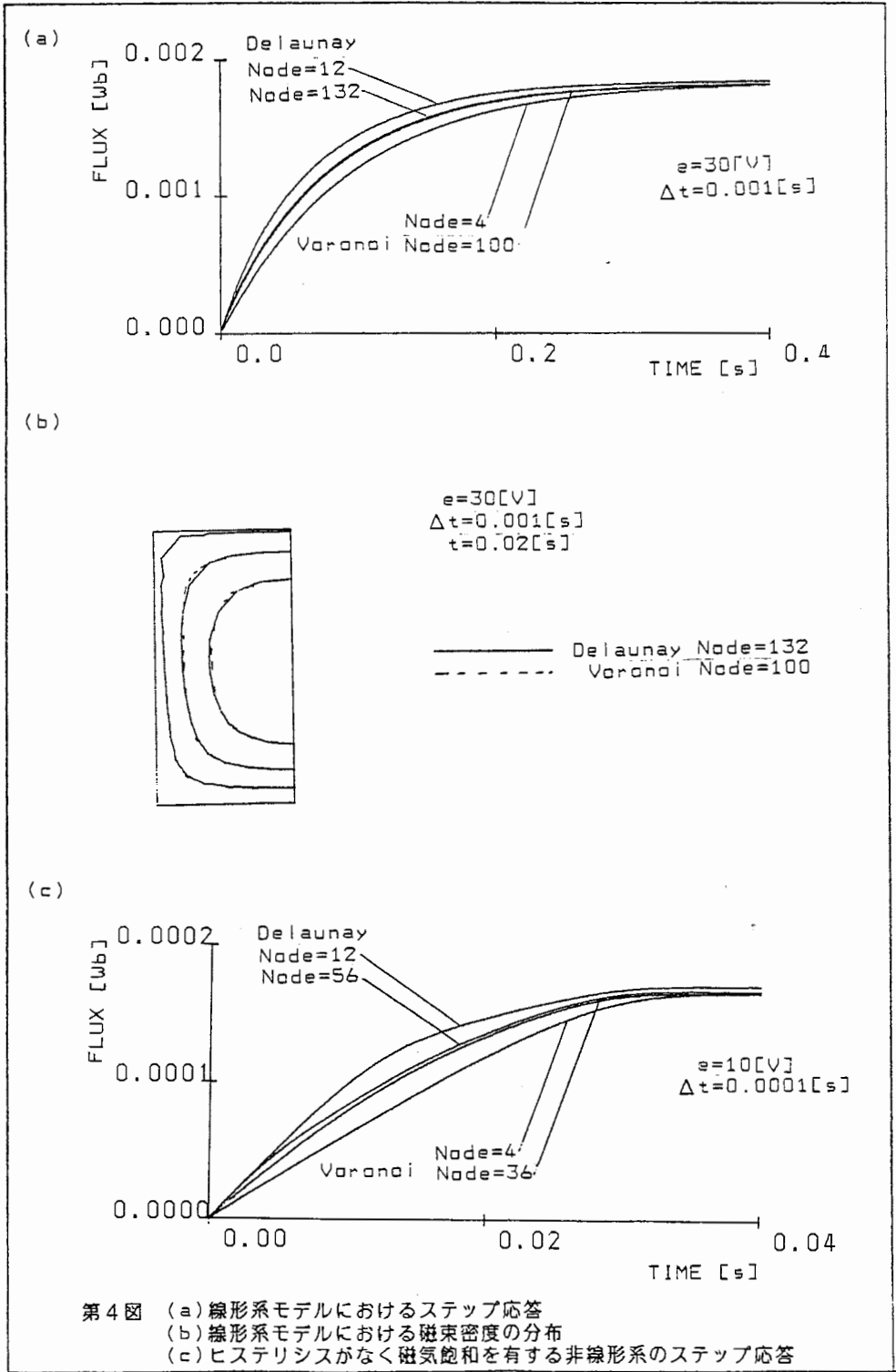
三番目に、磁気飽和と磁気ヒステリシスを考慮し、正弦波50Hzの入力に対する全磁束の応答を第5(a)図に示す。

最後に、磁気ヒステリシスの影響を調べるため鉄心の抵抗率を $\rho=\infty$ とした積層鉄心コアを想定し計算を行なった。その結果を縦軸を全磁束、横軸を励磁電流としたヒステリシスループを第5(b)図に示す。但し、電源は50Hzの正弦波である。

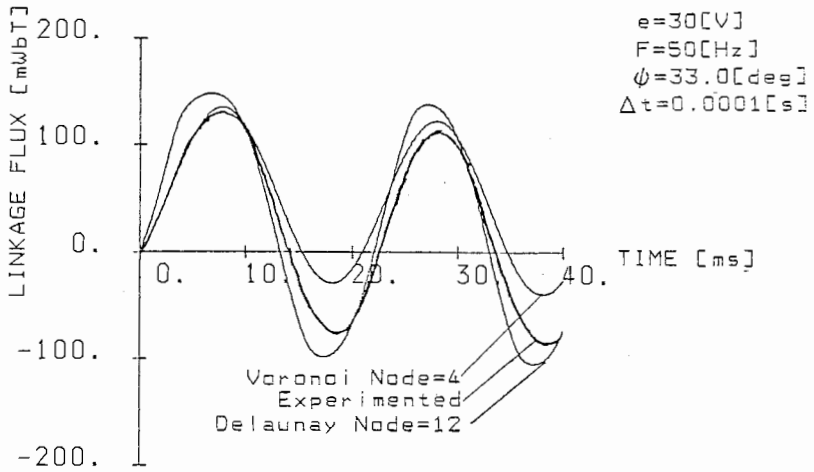
第4~5図の結果から、Voronoi系Delaunay系を合成するVoronoi-Delaunay法は線形のみならず非線形な拡散方程式に対しても極めて有効で、本報告の計算例では、同一精度の解を得るために従来の単純な三角形一次要素を使う有限要素法に比較して約1/50程度の時間で計算可能であることがわかった。なお、透磁率 μ や磁気ヒステリシス係数 s に対する関数は文献[6]に示してある。

第1表 計算に使用した諸定数

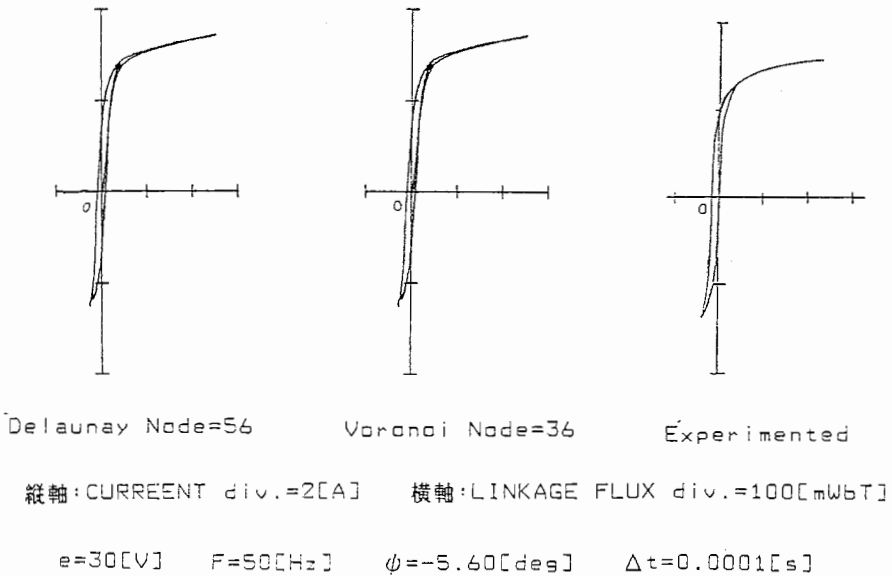
Delaunayの三角形		直角二等辺三角形
励磁コイルの巻数		$n=900$
コアの外半径		$0.05[m]$
コアの内半径		$0.04[m]$
コアの厚さ		$0.01[m]$
励磁コイルの抵抗	-塊状鉄心	$r_e=6.52[\Omega]$
	-積層鉄心	$r_e=6.23[\Omega]$
鉄心の抵抗率	-塊状鉄心	$\rho=20.6[\mu\Omega\cdot m]$
	-積層鉄心	$\rho=\infty[\Omega\cdot m]$



(a)



(b)



第5図 (a)ヒステリシスと磁気飽和を考慮した系の正弦波に対する応答
(b)うず電流が流れない場合の動的ヒステリシスループ

6. 結言

本報告では、うず電流を含む系についてVoronoi-Delaunay離散化法の適応性を吟味した。具体的な計算対象として塊状鉄心を有するトロイダルリアクトル中の磁界分布を調べた。その結果、Voronoi-Delaunay離散化法は動的磁界を支配する拡散方程式に対しても極めて有力な計算法であることが確認された。

参考文献

- [1]マグネティックス研究会資料No.MAG-85-62.
- [2]マグネティックス研究会資料No.MAG-85-63. ☆
- [3]Y.Saito et al, "A representation of Magnetic hysteresis," IEEE Trans. Magetics, Vol MAG-25, No.5, 1984.
- [4]マグネティックス研究会資料No.MAG-85-64.
- [5]Z.J.Cendes, "Magnetic Field Computation using Delaunay triangulation and Complementary finite element method", IEEE Trans. Magnetics, Vol.MAG-19, No.6, 1983.
- [6]Y.Saito, "Three dimensional analysis of magnetodynamic fields in electromagnetic devices taking into account the dynamic hysteresis loops," IEEE Trans. Magetics, Vol MAG-18, No.2, 1982.

☆誤記 (18)(19)式
$$\frac{1}{\mu_1^b} + \frac{1}{\mu_2^c}$$

正記
$$\frac{A_k}{\mu_1^b} + \frac{A_l}{\mu_2^c}$$