

双対Mesh法による高速Field計算

斎藤兆古，早野誠治，木住野泰光

(法政大学)

1985年12月19日

社団法人 電 気 学 会

東京都千代田区有楽町1-12-1

双対 Mesh 法による高速 Field 計算

Faster Field Computation by Dual Meshes

齋藤 兆古 , 早野 誠治 , 木住野 泰光
Y. Saito S. Hayano Y. Kishino

法 政 大 学 工 学 部
College of Engineering, Hosei University

1. まえがき

半導体, 電磁界中のプラズマ, 電磁界, 化学反応系などの多くの分野において, 系の特性は偏微分方程式を解くことによって得られる場合が多い。このことから, 科学計算の分野では, 偏微分方程式を数値的に解くことが主要なテーマとなっている。比較的簡単な系においては, 二次元の偏微分方程式で記述されるが, 多くの場合, たとえば NMR-CT や超伝導発電機などにおいては, 精度の高い磁界分布の算定が要求され三次元の偏微分方程式を解くことが急務となっている。

三次元の偏微分方程式を数値的に解く問題は, 大型行列演算を遂行することに帰する。このため, 三次元, 特に拡散型の問題に対しては高速計算が可能なスーパーコンピュータを用いて解かれるのが通例である [1]。しかし, スーパーコンピュータを用いることが解を得る唯一の方法ではなく, 数値解法の定式化を変更することで行列の規模を小型化し, 汎用計算機を用いて解く方法も考えられる。この一例として, 差分法では複雑な境界を記述するために多くの節点数を必要としていたのに対し, 有限要素法では形状に対する適合性が優れているために, 複雑な境界に対して節点数は差分法に比較して少く, 結果として行列の小型化に大きく寄与している。

本報告の方法は, 小型行列を重複して計算し, その結果を組みあわせることで大型行列計算による結果と同等の精度を高速で得る全く新しい定式化である。その骨子は, 問題領域をとり囲む外部節点系以外に内部節点系による定式化を可能としたことと, 外部節点系と内部節点系の収束性の違いに着目したところにある。本報告では, 筆者等の提案した双対 Mesh 法と最も汎用性の高い三角形一次要素を使用する有限要素法を具体的な例について計算し, 比較検討を行なう。

2. 双対 Mesh 法

2.1 数学的モデル

電気工学だけでなく, 工学の諸分野における Field の解析の多くは, Poisson 又は Laplace 型の偏微分方程式を解くことに帰する。ここでは

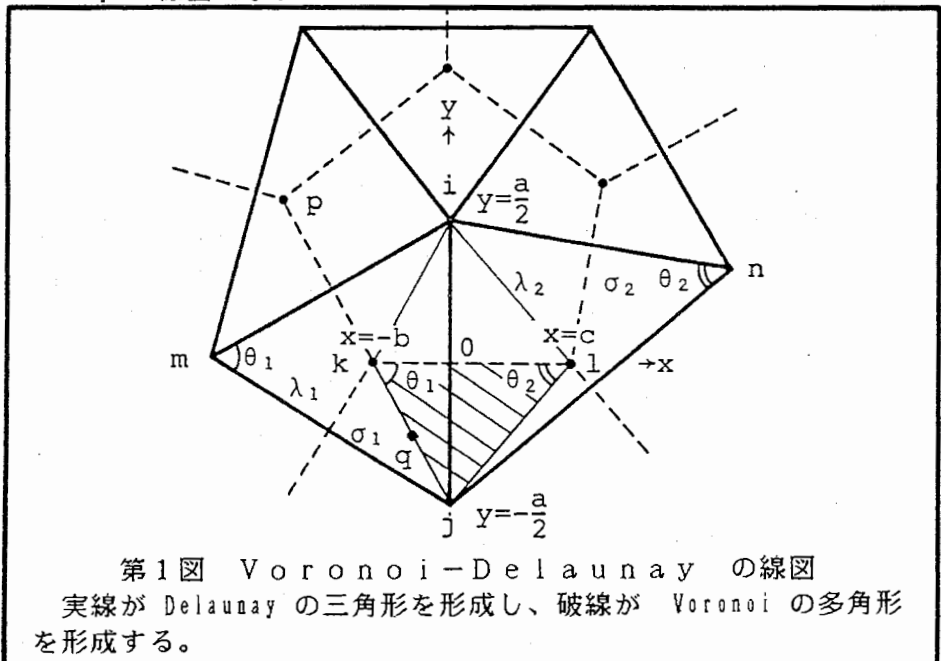
簡単化のため、 λ を媒質のパラメータ、 ϕ を Scalar 又は Vector Potential の z 方向成分として、次式で与えられる Poisson 型の偏微分方程式を解くべき数学的モデルと仮定する。

$$\lambda \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \lambda \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \sigma = 0, \quad (1)$$

ここで、 σ は Source Density の項である。

2. 2 離散化法

空間を離散化する方法では、二次元問題において、特定の幾何学的な平面図形で問題領域をどのように埋めつくすかが重要である。いま問題領域で、各節点が Snap Shot で決定されたとしよう。各隣接する節点を結んで得られる三角形による離散化法を Delaunay の三角化法という [2]。この三角形を Delaunay の三角形と称し、各三角形の外心を結んで得られる多角形を Voronoi の多角形という。Voronoi の多角形は、各節点の中点を垂直に分割する線分が構成する図形である。従って、与えられた問題領域は Delaunay の三角形又は Voronoi の多角形のどちらかで埋めつくすことができる。本報告では、Delaunay の三角形が形成する系を外部節点系または Primal 系と称し、Voronoi の多角形が形成する系を内部節点系又は Complementary 系と称する。Voronoi-Delaunay 図形の関係は、空間の離散化法のみならず、画像処理分野や結晶解析の分野でも極めて有用な関係でいわゆる計算幾何学に結びついている [3]-[6]。第 1 図に Voronoi と Delaunay の線図を示す。



第 1 図 Voronoi-Delaunay の線図

実線が Delaunay の三角形を形成し、破線が Voronoi の多角形を形成する。

2.3 外部節点系

(1) 式を数値的に解くために、第1図の実線部分で示される三角形で問題領域が離散化されたとする。各三角形の頂点の Potential を未知数とする節点間の連立方程式を得る方法は、変分原理に基づく方法と重みつき残差法による方法がある。本報告では、重みつき残差法の一つである部分領域法によって定式化を行う。

第1図で、Voronoi の多角形の節点 k と l を結ぶ方向を x 軸 Delaunay の三角形の節点 i と j を結ぶ方向を y 軸とし、線分 \overline{kl} と \overline{ij} の交点を原点とする局所座標系を考える。このとき、 y 軸方向の試行関数 ϕ_p は Lagrange 補間により

$$\phi_p = \frac{1}{2}(\phi_i + \phi_j) + (\phi_i - \phi_j) \frac{y}{a}, \quad (2)$$

与えられる。ここで、 a は線分 \overline{ij} の長さである。

(2) 式の ϕ_p を (1) 式の ϕ として代入し、第1図の斜線部分について積分すると、

$$\begin{aligned} & \int_{-\frac{a}{2}}^0 \int_{-b}^c \left\{ \lambda \frac{\partial^2 \phi_p}{\partial x^2} + \lambda \frac{\partial^2 \phi_p}{\partial y^2} + \sigma \right\} dx dy \\ &= \int_{-b}^c \lambda \frac{\partial \phi_p}{\partial y} dx + \int_{-\frac{a}{2}}^0 \int_{-b}^c \sigma dx dy \\ &= \left(\frac{\lambda_1}{2} \cot \theta_1 + \frac{\lambda_2}{2} \cot \theta_2 \right) (\phi_i - \phi_j) + \left(\frac{ab}{4} \sigma_1 + \frac{ac}{4} \sigma_2 \right) = 0, \quad (3) \end{aligned}$$

の節点 i, j 間の関係式を得る。ここで、 b と c はそれぞれ、第1図で仮定されている x 軸上の点 k と l の位置である。節点 j と隣接する節点 m, n 間の関係式も (3) 式と同様にして得ることができる。他の Delaunay の三角形の頂点に関する節点方程式も節点 j と同様にして得ることができ、その結果、全体としての外部節点系に関する連立方程式を得る。いま、係数行列を P 、節点ベクトルを $\bar{\phi}_p$ さらに外部入力ベクトルを \bar{F}_p とすれば、外部節点系の連立方程式は、

$$P \bar{\phi}_p = \bar{F}_p, \quad (4)$$

と書ける。(4) 式から、外部節点系の Functional f_p は、

$$f_p = \frac{1}{2} \bar{\phi}_p^T P \bar{\phi}_p, \quad (5)$$

で与えられる。ここで、上添字 T は行列の転置を示す。

本節では、(1)式の二次元問題に対して、局所座標系で(2)式の一次元試行関数を代入し、(3)式の節点方程式を導いた。(3)式の節点方程式のポテンシャル ϕ_i と ϕ_j の係数は、三角形一次要素を用いた有限要素法と全く一致する。従って、(4)式の外部節点系方程式の係数行列 P は三角形一次要素を用いた有限要素法と全く一致する。これは、局所座標系において、(1)式の二次元問題を一次元問題として取り扱い、局所座標系全体の集合として二次元の解を得ることが可能であることを意味する。このような方法を、局所一次元法という[7], [8]。

2.4 内部節点系

第1図の破線で示される Voronoi の多角形で問題領域が離散化されたとしよう。但し、媒質のパラメータ λ は Voronoi の多角形をとり囲む Delaunay の三角形中で一定値を取るものとする。従って、外部節点系の節点は媒質のパラメータ λ の異なる境界上に位置するため、Field Intensity $\partial\phi_p/\partial y$ が境界面で両領域に共通となっている。Voronoi の多角形の頂点を節点とする内部節点系では、節点が媒質中に位置するため Field Intensity を境界面で両領域に共通とすることができない。しかし内部節点系の節点は常に媒質のパラメータ λ の異なる境界面の垂直二等分線上に位置するため、Flux Density を境界面で連続とする試行関数を導くことができる。第1図で、内部節点 k と l 間の試行関数を導く。第1図の局所座標系で、原点 0 の節点ポテンシャルを仮定し、節点 k, 0 間および 0, l 間の試行関数 ϕ_{c1} と ϕ_{c2} を(2)式と同様にして導き、Flux Density が連続の条件 $\lambda_1(\partial\phi_{c1}/\partial x) = \lambda_2(\partial\phi_{c2}/\partial x)$ を用いて、仮定した原点 0 の節点 Potential を決定し、これを元の試行関数 ϕ_{c1} と ϕ_{c2} に代入することでそれぞれの領域に対する試行関数を得る[7]。内部節点 k と l 間で、節点 k と原点 0 間の試行関数は、

$$\phi_{c1} = \frac{1}{\frac{\lambda_1}{b} + \frac{\lambda_2}{c}} \left\{ \frac{\lambda_1}{b} \phi_k + \frac{\lambda_2}{c} \phi_l + (\phi_l - \phi_k) \frac{\lambda_2}{bc} x \right\}, \quad (6)$$

で与えられる[7], [9]。(6)式を(1)式に代入し、第1図の節点 i, j, k で囲まれる三角形の面積について積分すると、

$$\begin{aligned} & \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-b}^0 \left\{ \lambda \frac{\partial^2 \phi_{c1}}{\partial x^2} + \lambda \frac{\partial^2 \phi_{c1} + \sigma}{\partial y^2} \right\} dx dy \\ &= \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \lambda \frac{\partial \phi_{c1}}{\partial x} dy + \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-b}^0 \sigma dx dy \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{2\lambda_1} \cot\theta_1 + \frac{1}{2\lambda_2} \cot\theta_2} (\phi_1 - \phi_k) + \frac{ab}{2} \sigma_1 = 0, \quad (7)$$

の関係式を得る。節点 k と隣接する他の内部節点 p など間の関係式も (7) 式と同様にして得ることができる。他の Voronoi の多角形の頂点に関する節点方程式も節点 k と同様にして得られる。いま、全体としての内部節点系に対する係数行列を C 、節点ベクトルを $\bar{\phi}_C$ さらに外部入力ベクトルを \bar{F}_C とすれば、内部節点系の連立方程式は、

$$C \bar{\phi}_C = \bar{F}_C, \quad (8)$$

と書ける。(8) 式から、内部節点系の Functional f_C は、

$$f_C = \frac{1}{2} \bar{\phi}_C^T C \bar{\phi}_C, \quad (9)$$

で与えられる。

2.5 合成節点系

(4) 式の外部節点系の方程式から得られる外部節点系ベクトル $\bar{\phi}_p$ は、Delaunay の三角形要素間の境界で Field Intensity を共通とするものである。他方、(8) 式の内部節点系の方程式から得られる内部節点ベクトル $\bar{\phi}_C$ は、Delaunay の三角形要素間の境界で Flux Density が連続となるものである。従って、Delaunay の三角形要素間の境界で Field Intensity を共通とする性質と Flux Density が連続となる性質を持つ解ベクトル $\bar{\phi}_h$ は、外部節点と内部節点の中間の位置で両者の平均の値を持つ節点ポテンシャルで構成されるベクトルである。たとえば、第1図で、外部節点 j と内部節点 k の中間点 q における合成ポテンシャル ϕ_q は、

$$\phi_q = \frac{1}{2} (\phi_j + \phi_k), \quad (10)$$

によって与えられる。(10) 式と同様にして、外部節点と内部節点の中間の位置の他の合成ポテンシャルも得ることができる。(3) 式の形状に関する係数 $(\lambda_1/2) \cot\theta_1 + (\lambda_2/2) \cot\theta_2$ は $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ のとき、(7) 式の係数 $1 / \{ (1/2\lambda_1) \cot\theta_1 + (1/2\lambda_2) \cot\theta_2 \}$ の逆数であることから、Delaunay の三角形と Voronoi の多角形は互いに双対であることがわかる。このことから、Delaunay の三角形による離散化法における Mesh と、Voronoi の多角形による離散化法における Mesh を双対 Mesh または双対 Network と称することとする。また、Delaunay の離散化法による外部節点系ベクトル $\bar{\phi}_p$ と Voronoi の離散化法による内部節点系ベクトル $\bar{\phi}_C$ は互いに逆方向から真の解に収束すると推定され

る。従って、両者の平均値として得られる合成解ベクトル $\bar{\phi}_h$ は外部節点系ベクトル $\bar{\phi}_p$ や内部節点系ベクトル $\bar{\phi}_c$ よりも高精度と考えられる。さらに、(5)式で与えられる外部節点系 Functional f_p と(9)式で与えられる内部節点系 Functional f_c の平均値

$$f_h = \frac{1}{2} (f_p + f_c) , \quad (11)$$

で与えられる合成 Functional f_h は f_p や f_c よりも高精度と考えられる。変分原理による真の解への収束性については、文献[7]を参照されたい。

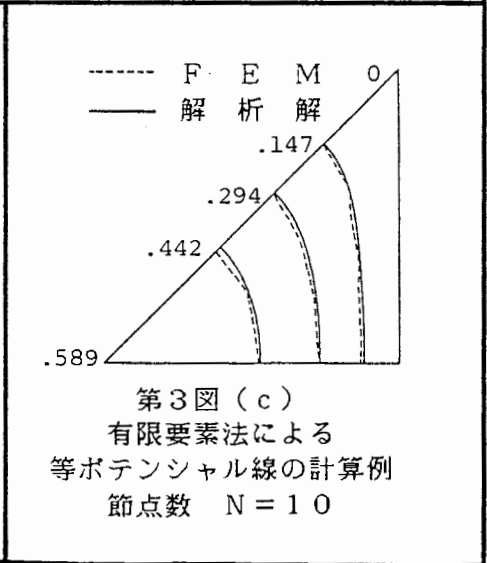
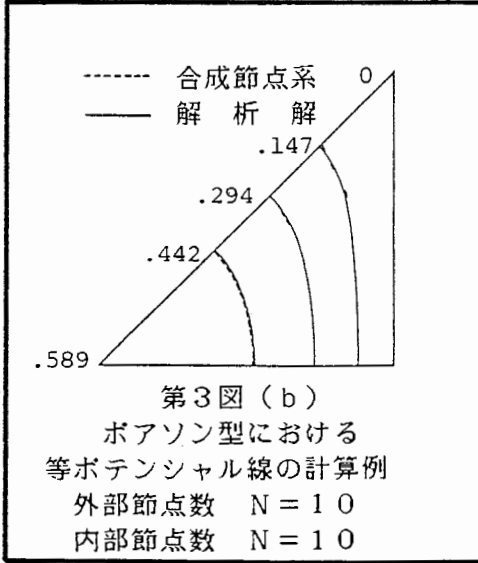
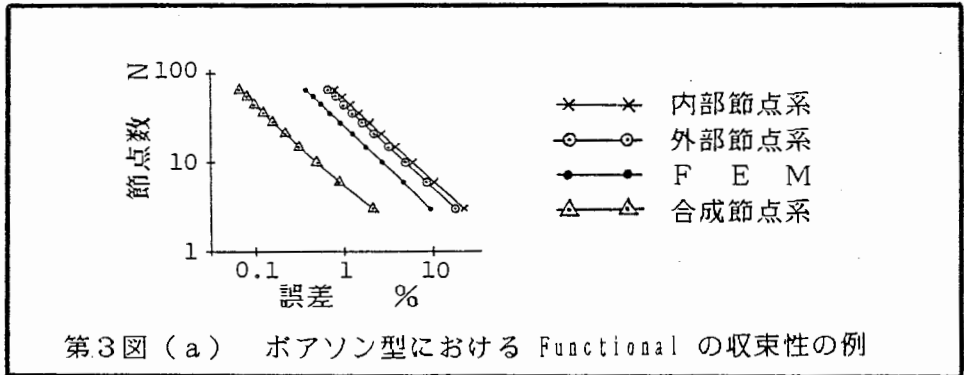
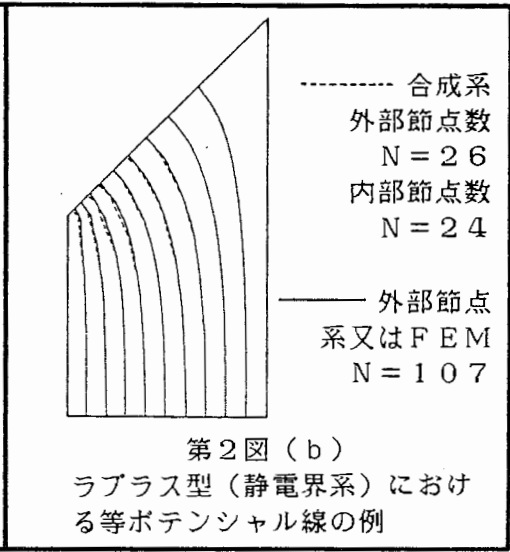
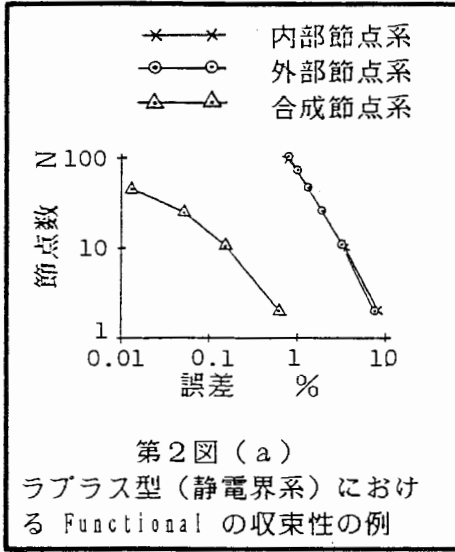
3. 例題

3.1 ラプラス型

ラプラス型偏微分方程式の例として、Hammond 等が双対エネルギー法で使用した静電界系について取りあげる[11]。Hammond 等は、従来から良く知られている相反変分原理に基づく有限要素法を提案した。彼等の方法では、相反変分原理を実行するために、Primal と Complementary で異なったポテンシャルを仮定することから、Functional の高精度な計算は可能であるが、ポテンシャルそのものの改善はできない。これに対し、筆者等が提案する相対 Mesh 法は、相反変分原理を幾何学的な双対性を用いて実行するために、Functional のみならずポテンシャルそのものも高精度で計算できることが本質的な違いである[7], [10]。第2図(a)に、Functional の計算例が示してある。第2図(a)で、縦軸は節点数を対数で、横軸はパーセンテージ誤差 $[\varepsilon = 100 \times (\text{近似解} - \text{真の解}) / \text{真の解}]$ の絶対値の対数で示してある。なお、合成 Functional の節点数は第2図(a)中で、外部節点数と内部節点数の平均値としてある。第2図(b)に、外部節点数107点で計算した等ポテンシャル線、および外部節点数26点と内部節点数24点から合成された等ポテンシャル線を示す。なお、この場合、外部節点系は三角形一次要素を用いる有限要素法と全く一致する。

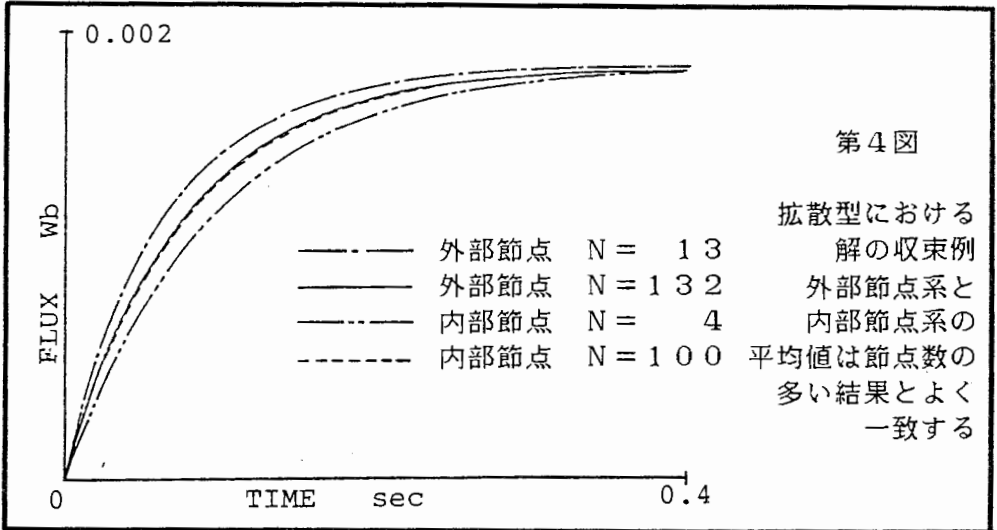
3.2 ポアソン型

この場合も、Hammond 等の例題である強磁性体中の導体内の静磁界計算を取り上げる。第3図(a)に、第2図(a)と同様の、節点数 N と誤差 ε を両対数でプロットした Functional の収束例が示してある。第3図(b)に、合成節点系による等ポテンシャル線が示してある。なお、比較のため、第3図(c)に、三角形一次要素を使用した有限要素法による等ポテンシャル線を示してある。



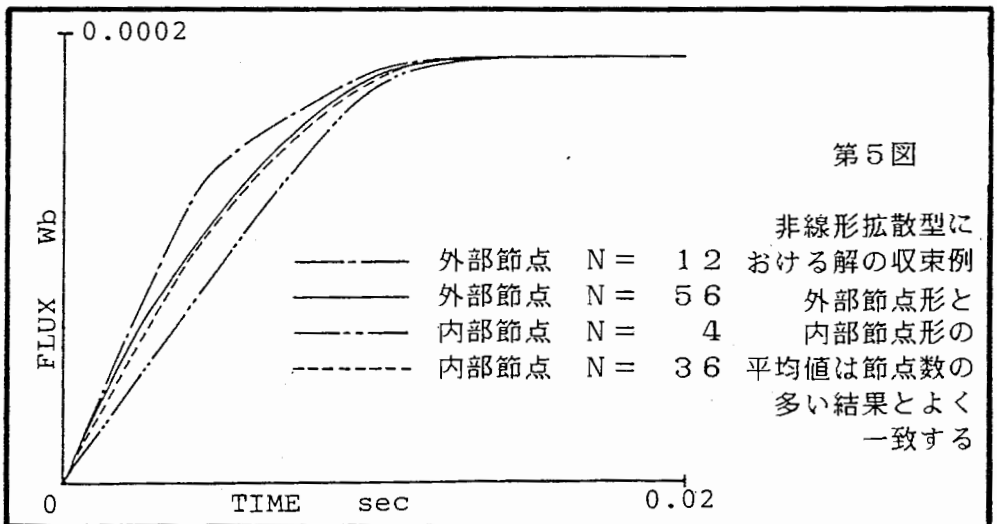
3.3 拡散型

拡散型の例として、塊状鉄心を持つトロイダルリアクトルのコア断面における渦電流問題を取り上げる [9], [12]。第4図に、鉄心に磁気飽和がないと仮定した線形モデルのステップ応答を示す。なお、第4図で、縦軸はコア断面における総磁束で、横軸は時間である。外部節点系は大きめ、内部節点系は小さめの値となることがわかる。なお、拡散型の定式化は、基本的に静的問題と同様であり、詳細は文献 [12] を参照されたい。



3.4 非線形の拡散型

拡散型の例で、磁気飽和と磁気ヒステリシスを考慮した非線形問題に対する計算結果を、第5図に示す。



4. 結 論

本報告では、小型行列計算を重複して行ない、その結果を組み合わせ、大型行列計算による結果と同等の精度を高速で得る方法としての、双対Mesh法の概要と、計算例を示した。本報告の例では、従来の最も簡単な三角形一次要素を使用する有限要素法と比較して、双対 Mesh 法は約一桁近く少ない節点数で同等の結果を生ずることを示した。筆者等は、既に三次元問題に対する双対 Mesh 法の定式化に成功しており、近く発表を予定している。

文 献

- [1] 唐木 幸比古, 電気学会雑誌, 昭和60年8月 105巻8号 pp.15-18.
- [2] Z. J. Cendes, "Magnetic Field Computation using Delaunay Triangulation and Complementary Finite Element Method," IEEE Trans. Magnetics, Vol. MAG-19, No. 6, 1983.
- [3] 横井 茂樹, 電気学会雑誌, 昭和60年5月 105巻5号 pp.23-26.
- [4] キツテル, 固体物理学入門(上) (Third Edition, 宇野, et al, 共訳).
- [5] 小川 泰, 数理科学, No. 231, Sep. 1982, pp. 7-16.
- [6] D. T. Lee, et al, "Two Algorithms for Constructing a Delaunay Triangulation," International Journal of Computer and Information Sciences, Vol. 9, No. 3, 1980, pp. 219-242.
- [7] 斎藤, et al, マグネティクス 研究会資料, MAG-85-62, 1985年7月.
- [8] A. R. Mitchell et al, The Finite Difference Method in Partial Differential Equations, (Wiley, 1980).
- [9] Y. Saito, et al, "Field Computations by the Complementary Networks," IEEE Trans. Magnetics, to be published in september issue 1985.
- [10] 斎藤, et al, マグネティクス 研究会資料, MAG-85-63, 1985年7月.
- [11] P. Hammond, et al, "Dual Finite-Element Calculations for Static Electric and Magnetic Fields," IEE PROC., Vol. 130, Pt. A, No. 3, May 1983, pp. 105-111.
- [12] 斎藤, et al, マグネティクス 研究会資料, MAG-85-151, 1985年11月.