

Voronoi-Delaunay 離散化法による磁界計算

その2. 応用例

斎藤 兆古 , 木住野 泰光 , 早野 誠治

中村 秀男 , 津屋 昇

(法 政 大 学 工 学 部)

1985年7月18日

社団法人 電 気 学 会

Voronoi-Delaunay 離散化法による磁界計算

その2. 応用例

Magnetic Field Computation by Voronoi-Delaunay Discretization

斎藤 兆古 , 木住野 泰光 , 早野 誠治 , 中村 秀男 , 津屋 昇
 Y.Saito Y.Kishino S.Hayano H.Nakamura N.Tsuya

法政大学工学部
 College of Engineering, Hosei University

1. まえがき

相反変分原理に基づく有限要素法が、Penman 等によって提案され、極めてよく磁界計算が行われることが報告されている。[1]-[3] しかしながら Penman 等の方法ではより精度の高い Functional は得られるが、Potential そのものの改善はできない。このことから、本報告においては、相反変分原理に基づく双対エネルギー法を Voronoi-Delaunay の離散化法を用いて実行し、Functional だけでなく Potential そのものについての改善を行う方法とその具体的応用例を与える。

2. 基礎方程式

電流密度 \mathbf{J} と磁界の強さ \mathbf{H} の関係は、

$$\nabla \times \bar{\mathbf{H}} = \bar{\mathbf{J}} . \quad (1)$$

で与えられ、さらに磁界 \mathbf{H} と磁束密度 \mathbf{B} の関係は、媒質の透磁率 μ をパラメータとして、次式で関係づけられる。

$$\bar{\mathbf{H}} = \frac{1}{\mu} \bar{\mathbf{B}} . \quad (2)$$

磁束密度の時間微分 $\frac{\partial \bar{\mathbf{B}}}{\partial t}$ と電界の強さ \mathbf{E} の関係は

$$\nabla \times \bar{\mathbf{E}} = - \frac{\partial \bar{\mathbf{B}}}{\partial t} , \quad (3)$$

で与えられる。(3) 式の関係から、磁束密度 \mathbf{B} は次の条件を満足しなければならないことがわかる。

$$\nabla \cdot \bar{B} = 0 \quad (4)$$

(4) 式の条件を満足させるため、磁束密度 B を Vector Potential A を用いて次式で与えられると仮定する。

$$\bar{B} = \nabla \times \bar{A} \quad (5)$$

(5) 式と (2) 式から、Vector Potential A に関する偏微分方程式を得る。

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \bar{A} \right) = \bar{J} \quad (6)$$

いま簡単のため、電流密度 J と Vector Potential は z 方向成分のみであり、さらに透磁率 μ は一定の線形の媒質であるとすれば、(6) 式は

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} = -\bar{J} \quad (7)$$

となる。媒質の異なる領域 1 と領域 2 の境界においては、磁束密度 B の境界に垂直な成分は両方の領域で等しくなければならないから、境界が y 方向に平行とすれば

$$\left. \frac{\partial A}{\partial y} \right|_{\text{領域1}} = \left. \frac{\partial A}{\partial y} \right|_{\text{領域2}} \quad (8)$$

の境界条件が成り立つ必要がある。他方、境界に平行な磁界の強さ H は境界に沿って等しくなければならないから、境界が y 方向に平行とすれば、次の境界条件が

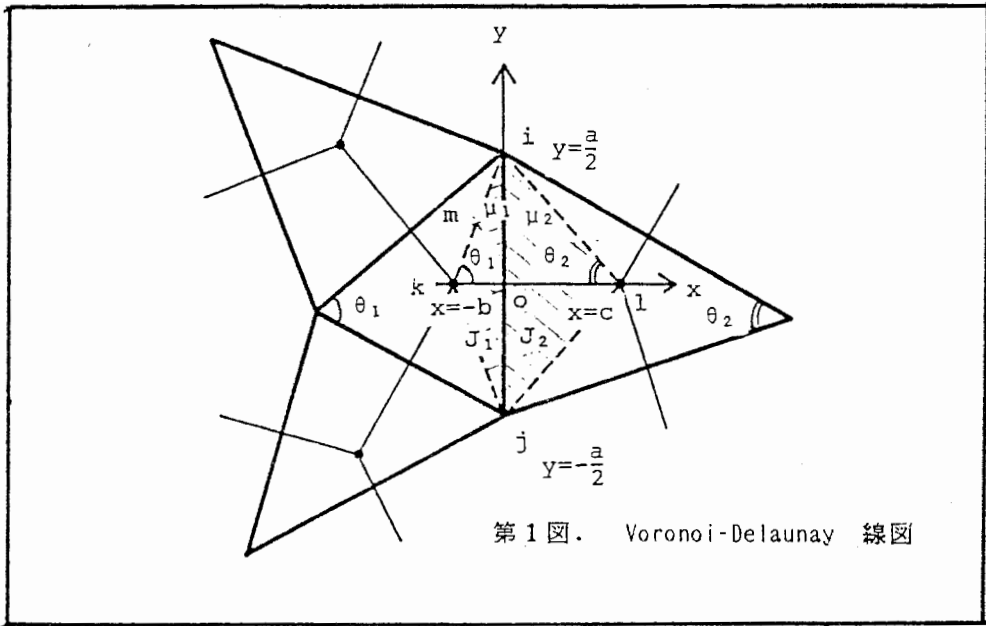
$$\left. \frac{1}{\mu_1} \frac{\partial A}{\partial x} \right|_{\text{領域1}} = \left. \frac{1}{\mu_2} \frac{\partial A}{\partial x} \right|_{\text{領域2}} \quad (9)$$

成り立たなければならない。但し、 μ_1 と μ_2 はそれぞれ領域 1 と 2 の透磁率である。

3. Voronoi-Delaunay の離散化法

3.1 Voronoi-Delaunay の線図

(7) 式を数値的に解くために、第 1 図のように空間が三角形で分割されるものとする。



第1図で、三角形の頂点 i, j を結ぶ線分を y 軸、三角形の外心を結ぶ線分を x 軸とする。第1図の斜線部分の領域で、節点を i, j, k, l とする試行関数を与えると、 x 軸と y 軸の直交性および原点 o について、節点 i と j の対称性から、 x 方向と y 方向それぞれ独立の試行関数となる。従って、(7)式が成り立つ空間が三角形で分割されたとき、それぞれの三角形について第1図のような局所座標系を考えると、三角形の頂点を節点とする系と三角形の外心を節点にする系は互いに独立となる。第1図の三角形が Delaunay の三角形であり、Delaunay の三角形の外心を結ぶ線分が構成する多角形を Voronoi の多角形という。

3.2 Functional

第1図において、 y 方向と x 方向の試行関数は互いに独立となっているから、(7)式も、(10)式と(11)式のように x 成分と y 成分に分離されると仮定する。

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} = -\frac{1}{2} J, \quad (10)$$

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} = -\frac{1}{2} J. \quad (11)$$

第1図の節点 i, j を使用する試行関数は y の関数であるから、(8)式の境界条件と(10)式を満足しなければならない。従って、(8)式と(10)式を満足する Functional は

$$F(A) = \int \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial A}{\partial y} \right)^2 dx dy - \int \bar{A} J dx dy \quad (12)$$

である。ここで、(12)式の積分は第1図の斜線部分の面積について行なわれたものとする。他方、第1図の節点k, lを使用する試行関数はxの関数であるから、(9)式の境界条件と(11)式を満足しなければならない。従って、(9)式と(11)式を満足するFunctionalは

$$G(A) = -\int \mu \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial x} \right)^2 dx dy + \int \hat{A} J dx dy \quad (13)$$

で与えられる。ここで、(13)式の積分は第1図の斜線部分の面積について行なわれるものとし、 \hat{A} は節点におけるPotentialの値である。いま、真のPotentialをAとし、 ϕ を第1図の斜線部分で微分可能な関数とし、 ε を数値パラメータとすれば、近似Functional $F(A+\varepsilon\phi)$ と $G(\bar{A}+\varepsilon\phi)$ はそれぞれ(12)式と(13)式から次のように展開される。

$$F(A+\varepsilon\phi) = F(A) + \varepsilon \int \left[2 \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial A}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right) - \phi J \right] dx dy \\ + \varepsilon^2 \int \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 dx dy \quad (14)$$

$$G(\bar{A}+\varepsilon\phi) = G(\bar{A}) - \varepsilon \int \left[2 \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial \bar{A}}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) - \phi J \right] dx dy \\ - \varepsilon^2 \int \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 dx dy \quad (15)$$

(14)式と(15)式、それぞれの右辺第3項から $F(A+\varepsilon\phi)$ と $G(\bar{A}+\varepsilon\phi)$ は、 ε が0に近づくとき、上限と下限からそれぞれの真のFunctional $F(A)$ と $G(\bar{A})$ に収束することがわかる。よって、 $F(A)$ はPrimal Functionalであり $G(\bar{A})$ はComplementary Functionalである。また、(8)式と(9)式の平均値は、それぞれの右辺第3項が打ち消されるため、極めて速く収束する。これがHybrid Functionalである。但し、Primalの系でのエネルギーの蓄積は、Complementaryの系でのエネルギーの放出に対応するため、(12)式と(13)式は同じ値を持つが符号が異なるからどちらかに統一してあつかうこととする。

3.3 試行関数

第1図で、節点i, jにおけるPotentialをそれぞれ A_i , A_j とすればy方向の試行関数 A_p は次式で与えられる。

$$A_p = \frac{1}{2} (A_i + A_j) + (A_i - A_j) \frac{y}{a} \quad (16)$$

Potential A_i と A_j は第1図の領域1と2の境界上の節点に位置するため(16)式は常に(8)式の境界条件を満足する。(16)式を(12)式に代入し、Functional $F(A_p)$ を A_i について微分し最小値を求めると、次

の節点方程式を得る。

$$\frac{\partial F(A_p)}{\partial A_i} = \left[\frac{1}{2\mu_1} \cot\theta_1 + \frac{1}{2\mu_2} \cot\theta_2 \right] (A_i - A_j) - \frac{a}{4} (b+c) (J_1 + J_2) = 0 \quad (17)$$

他のDelaunayの三角形が形成するPrimalの系についても(17)式と同様にして節点方程式が得られ、全体としてのPrimalの系の方程式が得られる。第1図で、節点k, lにおけるPotentialをそれぞれ A_k と A_l とすれば、x方向の試行関数 A_c は次式で与えられる。

$$A_c = \frac{1}{\left(\frac{1}{\mu_1 b} + \frac{1}{\mu_2 c}\right)} \left\{ \left(\frac{1}{\mu_1 b} + \frac{1}{\mu_2 c}\right) + \frac{1}{\mu_2 bc} (A_l - A_k) x \right\}, \quad (18)$$

$$A_c = \frac{1}{\left(\frac{1}{\mu_1 b} + \frac{1}{\mu_2 c}\right)} \left\{ \left(\frac{1}{\mu_1 b} + \frac{1}{\mu_2 c}\right) + \frac{1}{\mu_1 bc} (A_l - A_k) x \right\}. \quad (19)$$

ここで、(18)式と(19)式はそれぞれ第1図の領域1と2に対する試行関数である。(18)式と(19)式が(9)式の境界条件を満足することは、両式を(9)式に代入することによって容易にたしかめられる。(18)式と(19)式を(7)式に代入し、Functional $G(A_c)$ を A_k について微分し最大値を求めると次の節点方程式を得る。

$$\frac{\partial G(A_c)}{\partial A_k} = \frac{1}{\frac{\mu_1}{2} \cot\theta_1 + \frac{\mu_2}{2} \cot\theta_2} (A_l - A_k) + \frac{ab}{2} J_1 = 0 \quad (20)$$

他のVoronoiの多角形が形成するComplementaryの系についても(20)式と同様にして節点方程式が得られ、全体としてのComplementaryの系の方程式が得られる。

3. 2節で述べたように、Primal Functional $F(A_p)$ は上限から収束しComplementary Functional $G(A_c)$ は下限から収束する。従って、Primalの系から得られる節点Potentialが真の値よりも大きく算定されるとき、Complementaryの系から得られる節点Potentialは真の値よりも小さく算定され、Primalの系から得られる節点Potentialが真の値よりも小さく算定されるとき、Complementaryの系から得られる節点Potentialは真の値よりも大きく算定されると仮定できる。よって、第1図で、Primalの節点iとComplementaryの節点kの中間の節点mのPotential A_m は

$$A_m = \frac{1}{2} (A_i + A_k) \quad (21)$$

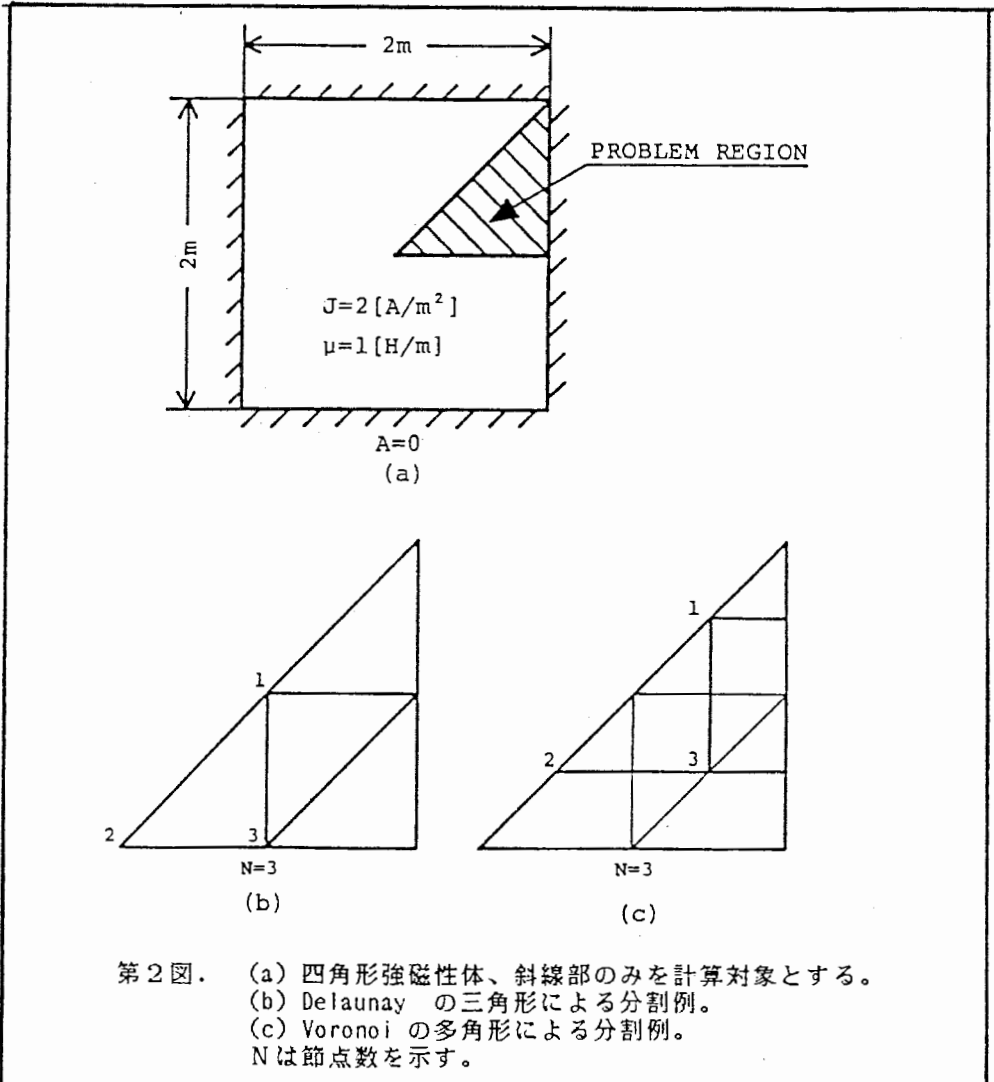
とすれば、 A_i と A_k の誤差が打ち消し合うために、 A_m は A_i や A_k よりも精度が向上している。他のPrimalとComplementaryの節点の中間点における節点Potentialも(21)式と同様にして得られる。これらのPotentialをHybrid Potentialとする。

4. 例題

3章で述べた、Vector Potentialで表わされる磁界系の計算例をHammond等が取り上げた例である四角形強磁性体に均一に電流が分布している場合の磁界について解析解と比較する。[3] 次に、電流が存在する領域と存在していない領域が混在する例として、Slot 中の磁界分布について解析解と本報告の方法による解と比較する。

4. 1 四角形強磁性体中の磁界

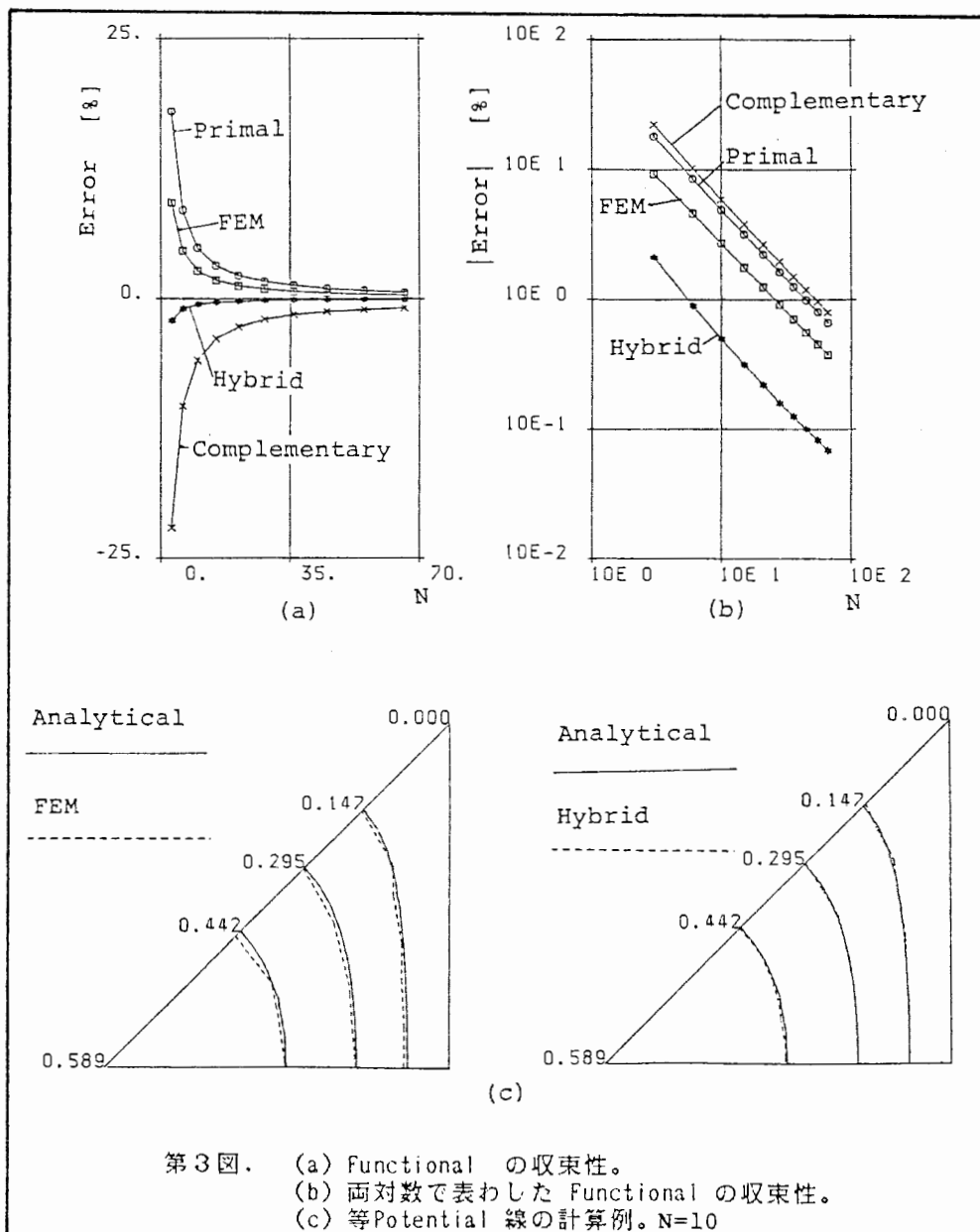
第2(a)図に示すように、対称性から四角形断面の斜線部分のみを考えればよい。第2(b)と(c)にそれぞれ Delaunay の三角形による分割例と



Voronoi の多角形による分割例を示す。この分割例では、Delaunay の三角形が直角二等辺三角形であるために、PrimalとComplementary の節点数が等しい。

第3(a) 図にPrimalとComplementary およびHybrid Functional の節点数 N の増加に対する収束性が示してある。なお、Functional の誤差は次式で定義する。

$$\text{Error} = \frac{\text{近似 Functional} - \text{真の Functional}}{\text{真の Functional}} \times 100 [\%] \quad (22)$$

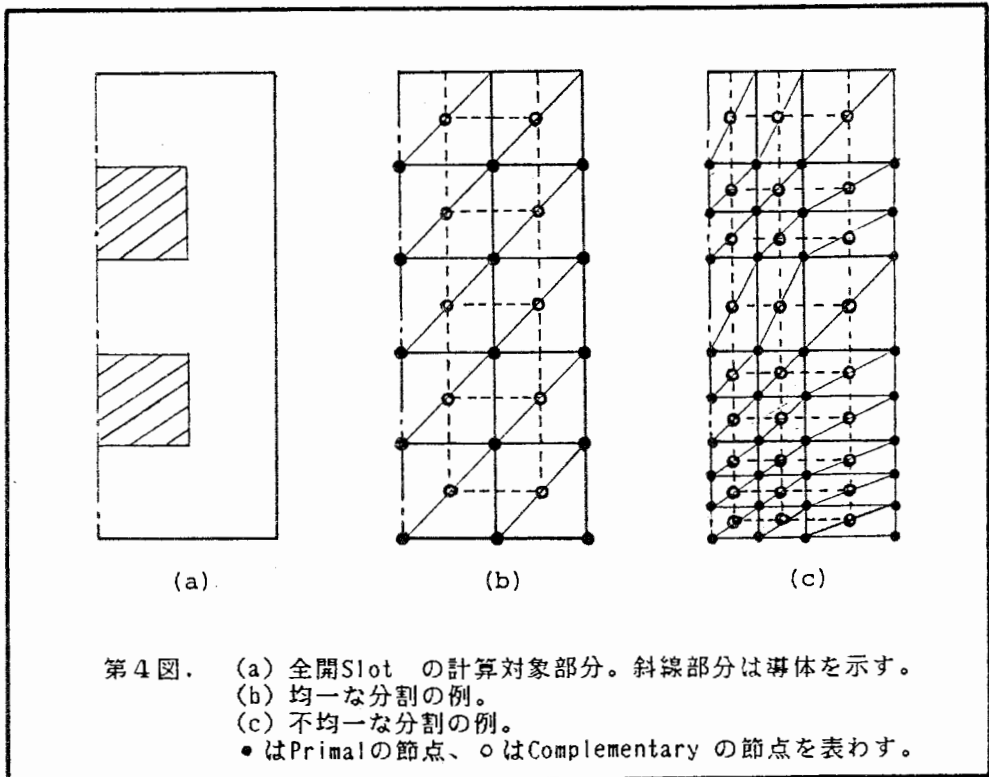


第3図. (a) Functional の収束性。
 (b) 両対数で表わした Functional の収束性。
 (c) 等Potential 線の計算例。N=10

第3図(b)に(22)式で定義される誤差の絶対値と節点数 N を両対数で表わした結果を示す。さらにPotentialの分布についての計算例を第3(c)図に示す。比較のために第3図中には、三角形一次要素を用いたFEMの計算結果も示してある。第3(a)図から、Primal Functionalは上限から収束しComplementary Functionalは下限から収束することが明らかである。PrimalとComplementaryそれぞれは単独での収束性はFEMより劣るが、HybridのFunctionalは極めてよい収束性を示すことがわかる。第3(b)図から、Hybrid Functionalは、PrimalとComplementaryの単独でのFunctionalに対して約一桁程度収束性がよいことがわかる。さらに第3(c)図から、(21)式の方法で得られるHybrid Potentialの精度が向上していることがわかる。

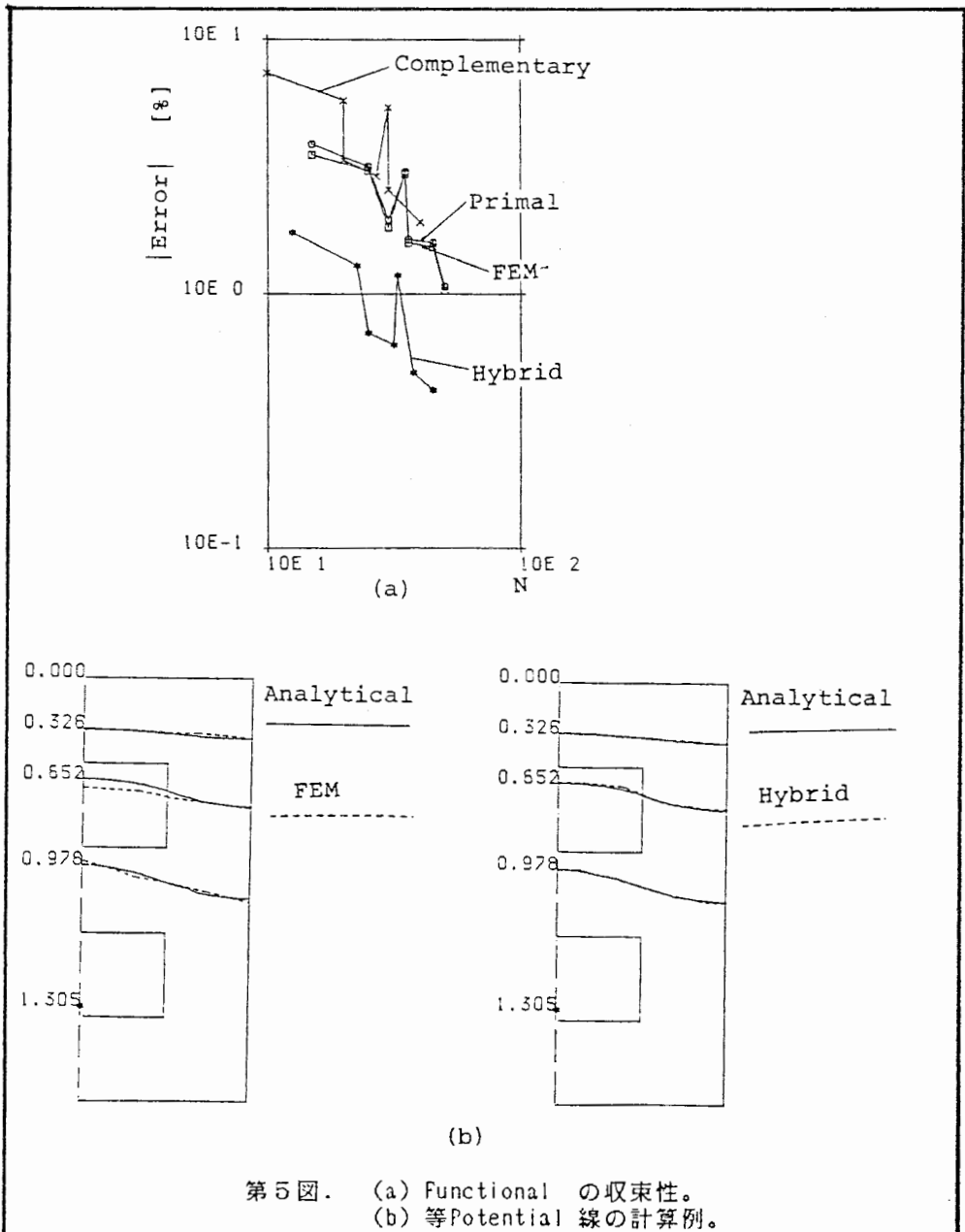
4.2 Slot中の磁界

第4(a)図に全開形Slotの計算対象となる半分の部分を示す。第4(a)図でSlotの上端の境界は、 $A=0$ とし、右端、左端および底辺部分の境界は対称と仮定した。これらの条件は、Stafflが解析解を得るために採用した境界条件と同じものである。[4] 第4(b)図に、均一にDelaunayの三角形とVoronoiの多角形で分割した例を示す。さらに第4(c)図に不均一に



Delaunay の三角形とVoronoi の多角形で分割した例を示す。

第5(a)図に、(22)式による誤差の絶対値と節点数の関係を両対数グラフで表わした結果を示す。第5(b)図にPotentialの分布についての計算例を示す。比較のため、第5(a)図には、三角形一次要素を使用したFEMによる結果も示してある。第5(a)図から、均一な分割を行なった Functional は単調な収束を示すが、不均一な分割では必ずしも節点数の増加がよい結果を生ずるとは限らないことを示している。第5(b)図の結果は(21)式によるHybrid Potentialが極めてよい精度であることを示している。



第5図. (a) Functional の収束性。
(b) 等Potential 線の計算例。

5. 結言

第一報では、一般的なPoisson形の偏微分方程式について、Voronoi-Delaunayの離散化法について理論的基礎を与えた。本報では、具体的な静磁界Vector Potential問題について、理論の概要と例を述べた。その結果、Voronoi-Delaunayの離散化法による数値解法は、一桁程度、単純な三角形一次要素を使用するFEMよりも収束性がよいことがわかった。このことは節点数が一桁少いことを意味し、計算機のMemory容量で考えると約二桁少い容量で済むことを示している。従って、今日広く普及している安価なパーソナルコンピュータでも、従来ミニコン以上の計算機でしか実行できなかった問題を十分に解ける事が本報告の方法によって示された。また、従来、磁気回路法として使われていた解析方法はComplementary Functionalに基づく方法の一種であることを付記しておきます。 [5]-[7]

参 考 文 献

- [1] J.Penman, et al, "Unified approach to problems in electrodynamics", IEE Proc., Vol.131, Pt.A, No.1, an.1984.
- [2] J.Penman, et al, "Complementary energy method in the computation of electrostatic field", IEEE Trans. Magnetics, vol.MAG-19 No.6, november 1983.
- [3] P.Hammond et al, "Dual finite-element calculations for static and magnetic fields", IEE Proc., Vol.130, Pt.A, No.3, May 1983.
- [4] Staff, Electrodynamics of electrical machines (ILIFFE, London, 1967.)
- [5] Y.Saito, "Three-dimensional analysis of nonlinear magneto-static field in a Saturable Reactor", Comp.Meths.Appl.Mech. Eng., Vol.16, No.1, Oct.1978.
- [6] Y.Saito, "Three-dimensional analysis of nonlinear magneto-dynamic field in a Sayurable Reactor", ibid. , Vol.22 , No.3, June 1980.
- [7] Y.Saito, "Theory of magnetic circuits for nonlinear magnetic fields in electromagnetic devices", Procs.2nd Inter.Sym.Inno. Nu.Ana.Appl.Eng.Scis., Montreal Quebec, 1980.