

フーリエ級数による磁化特性の表現

斎藤 兆古 ， 早野 誠治 ， 中村 秀男

木住野 泰光 ， 古郡 淳司 ， 津屋 昇

(法 政 大 学 工 学 部)

1985年7月18日

社 団 電 気 学 会
法 人

東京都千代田区有楽町1-12-1

フーリエ級数による磁化特性の表現

A Representation of Magnetization Characteristics by Fourier Series

齋藤 兆古 , 早野 誠治 , 中村 秀男 , 木住野 泰光
 Y.Saito S.Hayano H.Nakamura Y.Kishino

古郡 淳司 , 津屋 昇
 A.Furugohri N.Tsuya

法 政 大 学 工 学 部
 College of Engineering, Hosei University

1. ま え が き

有限要素法や境界要素法に代表される数値計算法は、近年のディジタル計算機のめざましい普及と共に急速な進展をみた。これらの計算手段を用いることによって、磁気装置のコア内部における磁束分布を算定したり、またその結果から磁気装置全体の最適設計などが試みられている。[1]

磁気装置のコアを形成する磁性材料の磁化特性は、磁気飽和や磁気ヒステリシス現象、さらにはうず電流の影響などを含む複雑なものである。一般に、磁気飽和特性とは常規磁化曲線、初期磁化曲線および True Saturation 曲線などの形で表わされている。一方、磁気ヒステリシス現象は特性曲線の形というよりは、むしろ残留磁気と保磁力の値で評価されてきた。[2]-[4]

有限要素法などの数値解析法を利用して磁気装置の磁束分布などを算定する場合には、磁化特性をどのように導入するかが計算結果の妥当性を大きく支配することとなる。しかしながら、上述の通り磁化特性そのものの表現方法には各種の形式がある。なかでも、磁気ヒステリシス現象を明確に表現する方法は特に規定されていないので、いろいろな表現方法が模索、提案されているのが現状のようである。[5][6]

本報告では、磁束が正弦波状に時間に対して変化するという通常の下で、磁化特性に対して次のようなことを明らかにする。すなわち、常規磁化曲線、True Saturation 曲線および筆者等が提唱している Chua 形磁化特性モデルなどがフーリエ級数を用いて表現できることを示し、これらの関係を考察する。また、従来残留磁気と保磁力の値で評価されていた磁気ヒステリシス現象は、新たな磁気ヒステリシス特性曲線なる形を用いて表現できることを紹介する。

2. フーリエ級数による磁化特性の表現

2.1 磁界Hのフーリエ展開

いま、磁束が正弦波状に時間に対して変化しているとき、第1図.(a)のような磁化特性が得られたとする。第1図.(b)に示すように磁束密度Bと磁界Hは時間方向に展開できる。第1図.(b)の磁界Hをフーリエ級数で表わすと、

$$H = \sum H_{sn} \sin(n\omega t) + \sum H_{cn} \cos(n\omega t) \quad (1)$$

となる。ここで、 H_{sn} と H_{cn} は第n次高調波に対するフーリエ係数である。基本波の周期をTとすれば、それぞれ次式で与えられる。

$$H_{sn} = \frac{2}{T} \int_0^T H \cdot \sin(n\omega t) dt \quad (2)$$

$$H_{cn} = \frac{2}{T} \int_0^T H \cdot \cos(n\omega t) dt \quad (3)$$

(1)式において、磁界Hに含まれる高調波成分の大きさが変わることによって、ヒステリシス・ループの形状も変化することはすでに報告されている。[7] ここでは、この高調波成分の大きさには着目せず、磁界Hをフーリエ級数を用いて奇関数成分と偶関数成分とに分解してみる。

すなわち、第1図.(b)の磁界Hは(c)および(d)に示すような奇関数成分 H_o と偶関数成分 H_e との和として表現できる。この奇関数成分 H_o は、(1)式の右辺第1項であり、次式で与えられる。

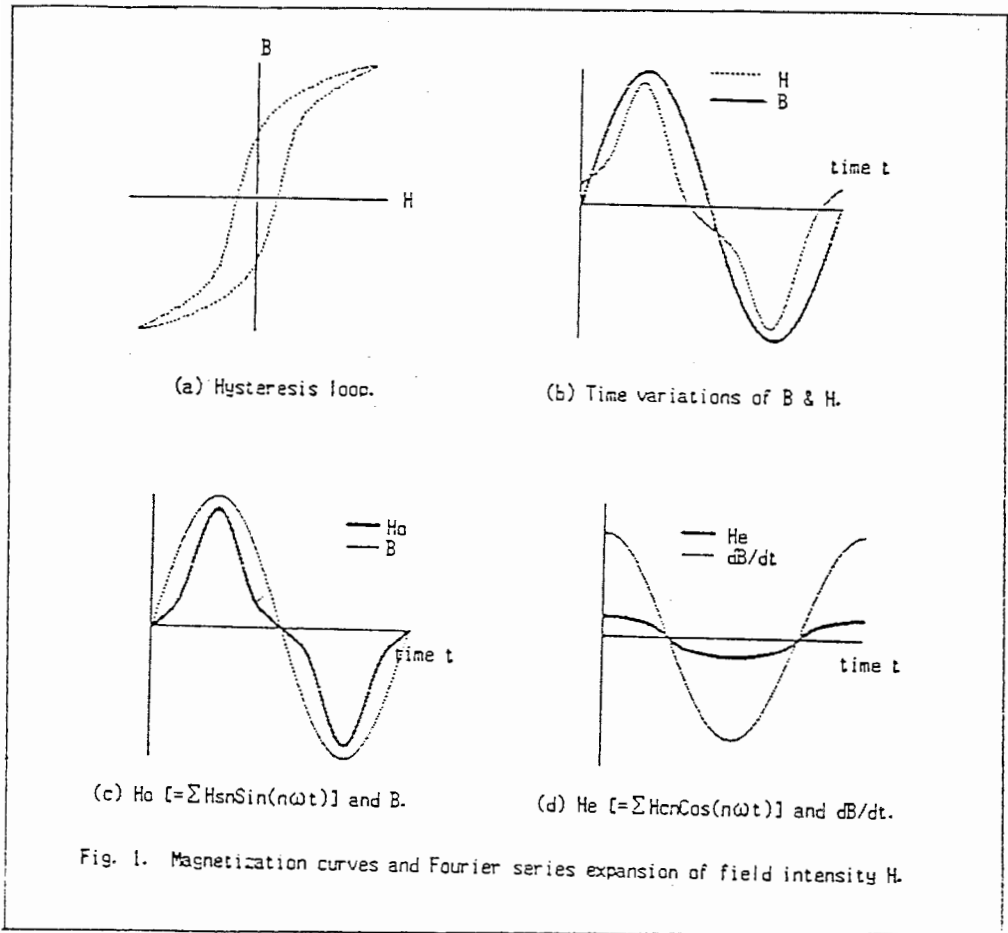
$$H_o = \sum H_{sn} \sin(n\omega t) \quad (4)$$

同様に、(1)式の右辺第2項は偶関数成分 H_e であり、次式で与えられる。

$$H_e = \sum H_{cn} \cos(n\omega t) \quad (5)$$

磁束密度Bは、正弦波状に時間に対して変化すると仮定しているので、当然これは奇関数であり、(4)式の H_o と同相となる。一方、磁束密度の時間微分 dB/dt は偶関数であり、(5)式の H_e と同相となる。

すなわち、磁界Hはフーリエ級数展開することによって、奇関数成分 H_o と偶関数成分 H_e とに分解される。そして、それらは磁束密度Bおよび磁束密度の時間微分 dB/dt のそれぞれに同相となることが、第1図.(c)および(d)から明らかである。



2. 2 磁化特性

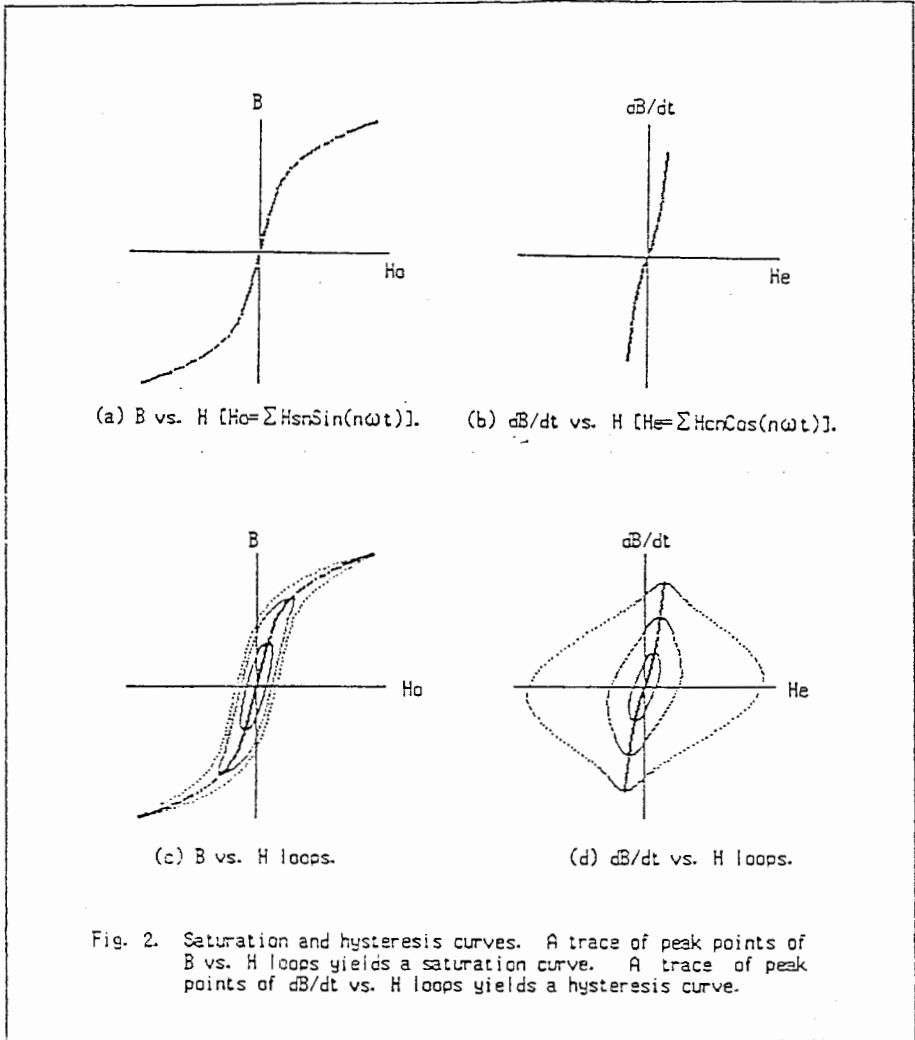
磁化特性には、大別して磁気飽和特性と磁気ヒステリシス特性の二つがある。前者は常規磁化曲線、初期磁化曲線および True Saturation 曲線などの形で表わされている。一方、後者は特性曲線の形というよりは、むしろ残留磁気と保磁力の値で評価されてきた。[2]-[4]

ここでは、先に述べた磁界の奇関数成分、あるいは偶関数成分などを用いて、これらの磁化特性について考察を加える。

第1図。(c)に示す磁界の奇関数成分 H_o を横軸にとり、磁束密度 B を縦軸として、 H_o と B との関係を描くと第2図。(a)のようになる。これは、明らかに磁気飽和特性を表す曲線である。

また、第1図。(d)に示す磁界の偶関数成分 H_e を横軸にとり、磁束密

度の時間微分 dB/dt を縦軸として、 H_e と dB/dt との関係を描くと第2図。(b) のようになる。ここで、第2図。(b) は後述するように鉄損に関係する曲線を表わすので、"磁気ヒステリシス特性曲線"と呼ぶこととする。



ここまでの結果から、次のようなことが言える。

[a] 第1図。(c) および (d) に示すように、磁束密度 B が最大または最小値を取る点では、磁束密度の時間微分 dB/dt および磁界の偶関数成分 H_e は常に零である。すなわち、この点は dB/dt および H_e に独立した点である。

[b] 逆に、磁束密度の時間微分 dB/dt が最大または最小値を取る点では、磁束密度 B および磁界の奇関数成分 H_o は常に零である。すなわち、この点は、 B および H_o に独立した点である。

[c] 第1図. (a)に示すヒステリシス・ループは、単一の磁束密度Bの値に対して、磁束密度が増加する場合と減少する場合では異なる磁界Hを持つ。この理由として、磁束密度の時間微分 dB/dt は磁束密度の増減に応じて異なる値を取る。従って、第2図. (b)に示すように、磁界の偶関数成分 H_e も異なる値を取るためである。

ここで、磁束密度Bは時間に対して正弦波状に変化しているため、同一磁束密度Bに対する dB/dt は同じ値であるが、Bの増減に応じて異なる符号を取る。同様に、 H_e も異なる符号を取る。また、同一磁束密度Bの値に対応する異なる磁界Hの平均値は、第2図. (a)に示す飽和特性曲線を生ずる。

[d] 磁束密度の時間微分 dB/dt を縦軸にとり、磁界Hを横軸にとれば、第1図. (a)のヒステリシス・ループとは逆方向の経路をとる" $dB/dt-H$ "ループが得られる{第2図. (d)の点線で画かれたループ群などがその例である}。この" $dB/dt-H$ "ループでは、単一の磁束密度の時間微分 dB/dt に対して、 dB/dt が増加する場合と減少する場合では異なる磁界Hを持つ。この理由として、磁束密度Bは dB/dt の増減に応じて異なる符号を取る。従って、第2図. (a)に示すように、磁界の奇関数成分 H_o も値は同じであるが異なる符号を取るためである。

ここで、磁束密度Bは時間に対して正弦波状に変化しているため、同一磁束密度の時間に対する変化率 dB/dt の値に対応する異なる磁界Hの平均値は、第2図. (b)に示す"磁気ヒステリシス特性曲線"を生ずる。

[e] 常規磁化曲線が第2図. (c)に示す一連のヒステリシス・ループ群の頂点を結ぶ曲線とすれば、この常規磁化曲線は第2図. (a)の飽和特性曲線と一致する。このことは、[a]の条件から明らかである。

また、[c]の条件から第2図. (a)の飽和特性曲線は、Prusty 等の提唱する True Saturation 曲線と一致する。[4]

2.3 鉄損

磁気装置のコアを構成する磁性材料の単位体積当りの瞬時電力 P_i は

$$P_i = (H_o + H_e) \frac{dB}{dt} \quad (6)$$

で与えられる。ここで、 H_o と H_e はそれぞれ(4)式と(5)式に示す通りである。磁束密度Bは正弦波状に時間に対して変化しているから、(6)式の dB/dt は

$$\frac{dB}{dt} = \omega B_m \cos(\omega t) \quad (7)$$

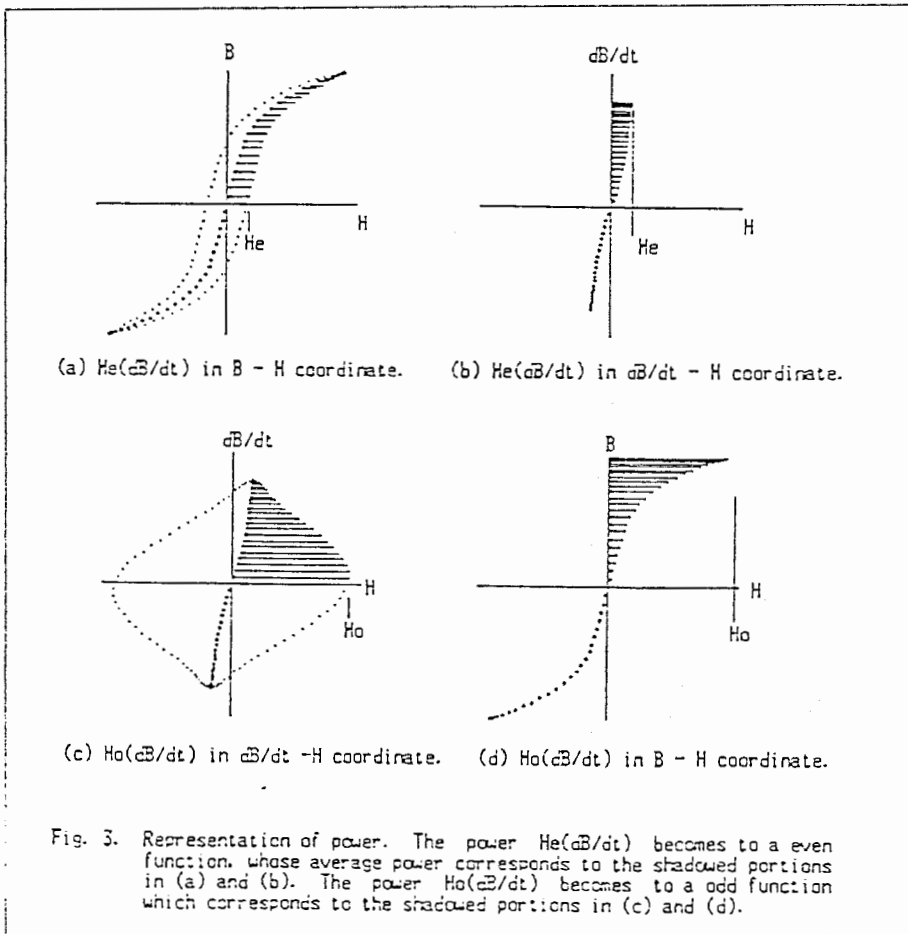
で与えられる偶関数となる。さらに、(6)式の右辺第2項(磁界 H_e と dB/dt との積による項)は両者共に偶関数であるため、平均値の電力を消費することになり、これが鉄損 P_a となる。

$$P_a = \frac{1}{2} \omega B_m H_{C1} \quad (8)$$

ここで、 H_{C1} は磁界の偶関数成分の基本波である。

第3図.(a)と(b)の H_e は等しいため、(a)図の斜線部分のエネルギーを周期 T で割って得られる電力は、(b)図の斜線部分で示す電力に等しくなる。

(6)式の右辺第1項(磁界 H_o と dB/dt との積による項)は奇関数と偶関数との積であるため、奇関数の電力となり平均値は常に零となる。ここで、第3図.(c)と(d)の H_o は等しいため、(c)図の斜線部分の電力を周期 T 倍して得られるエネルギーは、(d)図の斜線部分で示すエネルギーに等しくなる。



2.4 Chua形モデル

(1)式右辺のそれぞれに(4)式と(5)式を代入すれば、(1)式は次式のように書き直せる。

$$H = H_0 + H_e \quad (9)$$

磁界の奇関数成分 H_0 、磁束密度 B との関係は、第2図.(a)の飽和特性曲線で与えられる。従って、透磁率 μ を磁束密度 B の一価関数として次式のように定義する。

$$\mu = \frac{B}{H_0} \quad (10)$$

一方、磁界の偶関数成分 H_e と磁束密度の時間微分 dB/dt との関係は、第2図.(b)の "磁気ヒステリシス特性曲線" で与えられる。従って、ヒステリシス係数 s を磁束密度の時間微分 dB/dt の一価関数として次式のように定義する。

$$s = \frac{dB}{dt} \cdot \frac{1}{H_e} \quad (11)$$

(10)式の透磁率 μ と(11)式のヒステリシス係数 s とを使って(9)式は、次式のように書き直せる。

$$H = \frac{1}{\mu} \cdot B + \frac{1}{s} \cdot \frac{dB}{dt} \quad (12)$$

(12)式は筆者等が提唱している "Chua形モデル" である。右辺第1項は磁気飽和を表わし、第2項は磁気ヒステリシスとうず電流の影響を表わす項である。[6][8]

瞬時電力 P_i は、(6)、(7)、(9)および(12)式より

$$P_i = \frac{1}{\mu} \cdot B \cdot \frac{dB}{dt} + \frac{1}{s} \cdot \left(\frac{dB}{dt} \right)^2 \quad (13)$$

与えられる。

(13)式の右辺第1項は奇関数であるため、平均電力が零となる無効電力である。これは、第3図.(c)の " $dB/dt-H$ " ループで囲まれる面積に等しい。

(13)式の右辺第2項は、平均電力 P_a を持つ偶関数である。これは、第3図.(a)の $B-H$ ループで囲まれる面積を周期 T で割って得られる電力に等しい。

3. ま と め

本報告では、磁束密度 B が時間に対して正弦波状に変化するという条件の下で測定された磁化特性から、以下に述べるようなことが明らかになった。

(1) 磁界 H は、フーリエ級数に展開することによって奇関数成分 H_o と偶関数成分 H_e に分解できる。

(2) 磁界の奇関数成分 H_o と磁束密度 B から、磁気飽和特性曲線が得られる。この曲線は、常規磁化曲線および Prusty 等の提唱する True Saturation 曲線と一致する。また、筆者等の提唱してきた Chua 形モデルに対して、磁気飽和特性を表わすパラメータ μ を与える。

(3) 磁界の偶関数成分 H_e と磁束密度の時間微分 dB/dt から、磁気ヒステリシス特性を表わす曲線が得られる。この曲線は、Chua 形モデルの磁気ヒステリシス特性に関係するパラメータ s を与える。

(4) 磁性材料内部の瞬時電力は、偶関数成分と奇関数成分とから成る。そして、鉄損は偶関数成分の平均値で求められる。

参 考 文 献

- [1] P.P.Silvester et al, Finite Elements for Electrical Engineers, (Cambridge University Press, Cambridge 1983)
- [2] 電気材料便覧, 電気学会大学講座 昭和43年, 第4版
- [3] Magnetic Circuits and Transformers, (MIT Press, Janu.1965)
- [4] S.Prusty et al, "A novel approach for predetermination of magnetization characteristic of transformers including hysteresis" IEEE Trans., Vol.MAG-20, No.4, July 1984.
- [5] T.Nakata, "Numerical analysis of flux and loss distributions in electrical machinery," IEEE Trans., Vol.MAG-20, No.5, Sep.1984.
- [6] Y.Saito, "Three-dimensional analysis of magnetodynamic fields in electromagnetic devices taking into account the dynamic hysteresis loops," IEEE Trans., Vol.MAG-18, No.2, March 1982.
- [7] Simon N.M.Willcock et al, "Harmonic analysis of B-H loops," IEEE Trans., Vol.MAG-19, No.5, Sep.1983.
- [8] Y.Saito et al, "A representation of magnetic hysteresis," IEEE Trans., Vol.MAG-20, No.4, July 1984.