

2006 年度 修士論文

# 磁化特性のモデリングとその応用

MODELING OF MAGNETIZATION CHARACTERISTICS AND ITS APPLICATION

指導教授 齋藤 兆古

法政大学大学院  
工学研究科  
電気工学専攻 修士課程  
学籍番号 05R3231

氏名 タナカ ユウジ  
田中 祐司

## **Abstract**

This paper studies nonlinear phenomena caused by ferromagnetic materials. To represent nonlinear properties of ferromagnetic materials in series, parallel ferroresonant circuits as well as electrical transformer, we employ a Chua-type magnetization model composed of the nonlinear parameters: permeability  $\mu$ , reversible permeability  $\mu_r$  and hysteresis parameter  $s$  independently measured from the past magnetization history. By the backward Euler method with automatic modification, the transient analysis of this initial value problem is carried out. The characteristic values of the state transition matrix are calculated in each calculation step of Euler method in order to visualize the chaotic properties. As a result, it is clarified that the chaotic behavior in the ferroresonant circuit is greatly concerned with the magnetic aftereffect of ferromagnetic materials. Moreover, calculated transient response is well corresponding to measured one. The conclusions denote the usefulness of Chua-type magnetization model for electrical machines analysis fully taking hysteretic magnetization properties of ferromagnetic materials into account.

## 目次

Abstract.....	i
1. まえがき.....	1
2. 磁化特性の構成方程式.....	2
2.1. 古典 Chua 型構成方程式.....	2
2.1.1. 構成方程式の導出.....	2
2.1.2. 透磁率 $\mu$ とヒステリシス係数 $s$ .....	4
2.2. 新 Chua 型構成方程式.....	6
2.2.1. 磁化特性構成方程式の導出.....	6
2.2.2. 透磁率 $\mu$ とヒステリシス係数 $s$ .....	9
3. 構成パラメータとその測定.....	10
3.1. 構成パラメータ.....	10
3.1.1. 透磁率.....	10
3.1.2. 可逆透磁率.....	10
3.1.3. ヒステリシス係数.....	11
3.2. シミュレーション.....	12
3.2.1. 実験回路と構成パラメータの実験値.....	12
3.2.2. 周波数特性.....	13
3.2.3. マイナーループ.....	15
4. 電気機器への応用.....	17
4.1. 直列鉄共振回路.....	17
4.1.1. 直列鉄共振回路の定式化.....	17
4.1.2. 後方オイラー法と最適刻み幅の決定.....	18
4.1.3. 実験的検証と数値シミュレーション.....	20
4.1.4. ポアンカレ図.....	25
4.1.5. 固有値.....	26

4. 2. 並列鉄共振回路.....	27
4. 2. 1. 並列鉄共振回路の定式化.....	27
4. 2. 2. 実験的検証と数値シミュレーション.....	29
4. 2. 3. ポアンカレ図.....	33
4. 2. 4. 固有値 .....	34
4. 3. 変圧器 .....	35
4. 3. 1. 変圧器回路の定式化.....	35
4. 3. 2. 実験的検証と数値シミュレーション.....	37
5. まとめ .....	40
6. 参考文献 .....	41
研究業績 .....	42
謝辞 .....	43

## 1. まえがき

磁氣的結合など磁性材料の特性を積極的に利用し多彩な機能を有する電気機器が数多く開発され、実用化されている。しかし、磁性材料の持つ磁気飽和、ヒステリシス、渦電流等の特性は、時として磁性材料を用いる電気機器において、予測困難で複雑なシステム応答を示す場合がある。したがって、磁性材料を含む電磁界解析の高信頼化は、高度化する電気機器の設計に不可欠であり、予測し難いシステム応答の解明に重要な役割を果たす。このような現状と共に、近年のパーソナルコンピュータの演算速度の高速化は目覚しく、比較的大規模な有限要素解、非線形解析をも遂行可能としつつある。

磁気ヒステリシスを表現するためにさまざまな磁化特性モデルが提案されているが、その大半は過去の磁気履歴や物理的要因、例えば、残留磁気、残留応力等によって影響を受けるパラメータを用いている。このため、履歴特性を表現するパラメータそのものが履歴を含むことに起因して、再現される履歴現象は限定されることとなる。磁性材料を含む電磁界解析のキーは、材料の特性を表現する磁化特性モデル、すなわち構成方程式を導出し、Maxwell の方程式を解くことに帰する。従来から早野・齋藤らが提案する Chua 型磁化特性モデルに関し、強磁性体特有の現象であるヒステリシス、磁気余効、鉄共振現象などのシミュレーションおよびその実験的検証に成功し、電気機器設計に有用な鉄損、周波数特性、表皮深さに関する報告がなされている[1,2]。さらに他の代表的磁化特性モデルとの関係も明らかにされている[1,2,3]。

本論文では、Chua 型磁化特性モデルを用いて磁性材料を含む電気回路、特に定電流源として用いられる直列鉄共振回路、定電圧源として用いられる並列鉄共振回路および変圧器の非線形過渡特性に関して報告する。Chua 型磁化特性モデルの構成方程式より導出される回路方程式を状態変数法で表現し、後方オイラー法を用いて過渡解析を行う。同時に状態遷移行列の固有値を時間刻み幅ごとに計算し、固有値の時間推移を可視化する。その結果、回路応答がヒステリシスやカオス的な鉄共振現象を提示しているにもかかわらず、状態遷移行列の固有値は規則的に変化し履歴に依存しないことを示す。

以上の結果から、履歴現象を呈する系、すなわち、ヒステリシス現象を呈する非線形現象の解析において、過去の履歴に依存しないパラメータ測定とそれらを用いた解析が最初に解決されるべき最重要課題であることを述べる。

## 2. 磁化特性の構成方程式

本章は、本論文の根幹であり、まずフーリエ級数から古典 Chua 型構成方程式と短冊状磁区モデルにもとづいて新 Chua 型構成方程式を導く。原型の Chua 等の構成方程式(古典 Chua 型構成方程式)はパラメータ決定について問題があったが、ここではきわめて単純な形の構成方程式を提案する。Chua 等の構成方程式は、磁化特性を鎖交磁束の時間微分の項を含んで表現するので、この形式のモデルを特に Chua 型と呼ぶこととする。

### 2.1. 古典 Chua 型構成方程式

#### 2.1.1. 構成方程式の導出

磁束密度  $B$  が正弦波状に時間に対して変化している時、磁界  $H$  は磁気飽和とヒステリシスに起因して、図 1(a)のような歪波となる。この磁界をフーリエ級数で表すと、

$$H = H_{odd} + H_{even} \quad (1)$$

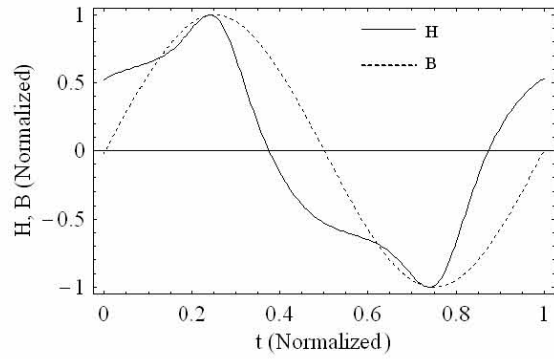
と書ける。ここで、 $H_{odd}$  と  $H_{even}$  はそれぞれ磁界  $H$  の奇関数と偶関数成分をあらわし、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} H_{odd} &= \sum_{n=1}^{\infty} H_{on} \sin(n\omega t) \\ H_{even} &= \sum_{n=1}^{\infty} H_{en} \cos(n\omega t) \end{aligned} \quad (2)$$

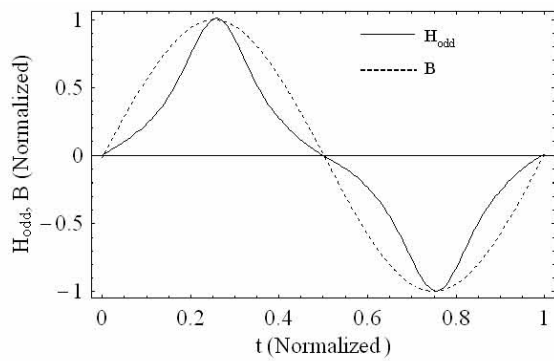
但し、

$$\begin{aligned} H_{on} &= \frac{2}{T} \int_0^T H \sin(n\omega t) dt \\ H_{en} &= \frac{2}{T} \int_0^T H \cos(n\omega t) dt \end{aligned} \quad (3)$$

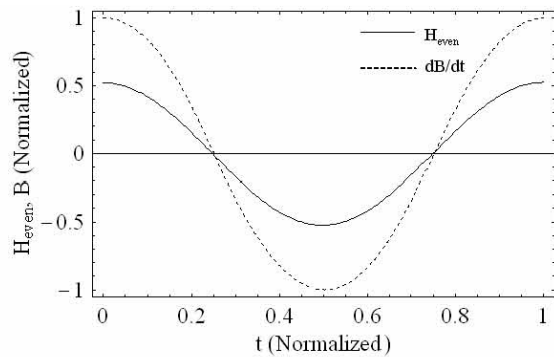
である。



(a)  $B$  正弦波  $H$  歪波



(b)  $H$  奇関数



(c)  $H$  偶関数

図1 磁界  $H$  と磁束  $B$  の関係

これらの磁界成分  $H_{odd}$ ,  $H_{even}$  および磁束密度  $B$  とその時間微分  $dB/dt$  の関数は、図 1(b),(c) に示してある。したがって、磁束密度  $B$  と磁界の奇関数成分  $H_{odd}$  は時間に対して同位相であり、磁束密度の時間微分  $dB/dt$  と磁界の偶関数成分  $H_{even}$  も同様に同位相である。よって、 $B$  と  $H_{odd}$  間のパラメータを  $\mu$  とすれば、

$$B = \mu H_{odd} \quad (4)$$

が成り立つ。同様に、 $dB/dt$  と  $H_{even}$  間のパラメータを  $s$  とすれば、

$$\frac{dB}{dt} = sH_{even} \quad (5)$$

が成り立つ。よって、(1),(4),(5)式から磁界  $H$  は、次式で与えられる。

$$H = \frac{1}{\mu} B + \frac{1}{s} \frac{dB}{dt} \quad (6)$$

(6)式は、Chua と Stromsmoe が提唱した構成方程式と一致する。このため、本論文では(6)式を古典 Chua 型構成方程式と呼ぶ。

### 2.1.2. 透磁率 $\mu$ とヒステリシス係数 $s$

(6)式で磁束密度  $B$  が  $B=B_m \sin(\omega t)$  で与えられるとき磁界  $H$  は、

$$H = \frac{1}{\mu} B_m \sin \omega t + \frac{\omega}{s} B_m \cos \omega t \quad (7)$$

で与えられる。さて、 $B-H$  ループの上昇曲線で、時間  $t=t_0$  のときの磁界は  $H_a$  が与えられるとすれば、

$$H_a = \frac{1}{\mu} B_m \sin \omega t_0 + \frac{\omega}{s} B_m \cos \omega t_0 \quad (8)$$

が成り立ち、また下降曲線で、 $\omega t = \pi - \omega t_0$  のときの磁界が  $H_b$  で与えられるとすれば、

$$H_b = \frac{1}{\mu} B_m \sin \omega t_0 - \frac{\omega}{s} B_m \cos \omega t_0 \quad (9)$$

が成り立つ。

(8),(9)式の和をとることによって、パラメータ  $\mu$  は、



$$\mu = \frac{B_m \sin \omega t_0}{\frac{H_a + H_b}{2}} \quad (10)$$

で与えられる。これは、 $B$ - $H$  ループの上昇曲線と下降曲線の、同一磁束密度  $B$  に対する磁界  $H$  の平均値をトレースした曲線から得られる透磁率であり、理想磁化曲線の透磁率と一致する。

また、(8),(9)式の差をとることによって、パラメータ  $s$  は、

$$s = \frac{B_m \cos \omega t_0}{\frac{H_a - H_b}{2}} \quad (11)$$

で与えられる。

次に、(7)式で、 $\omega t = \pi/2, 3\pi/2, \dots$  を考えると、

$$H = \pm \frac{1}{\mu} B_m \quad (12)$$

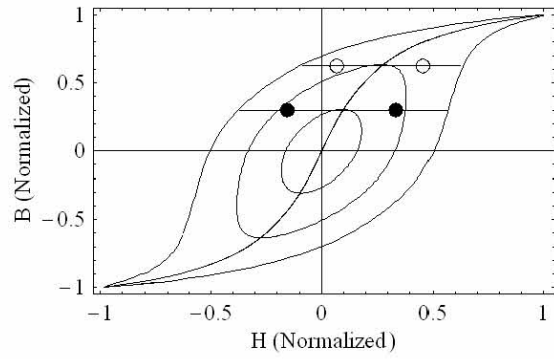
の関係が得られる。(12)式は、磁束密度  $B$  が正弦波状に変化しているとき、周期的磁化状態の  $B$ - $H$  ループ群の頂点を結んで得られる特性、すなわち正規磁化曲線から得られる透磁率  $\mu$  が求まることを意味する。

また、(7)式で、 $\omega t = 0, \pi, 2\pi, \dots$  を考えると、

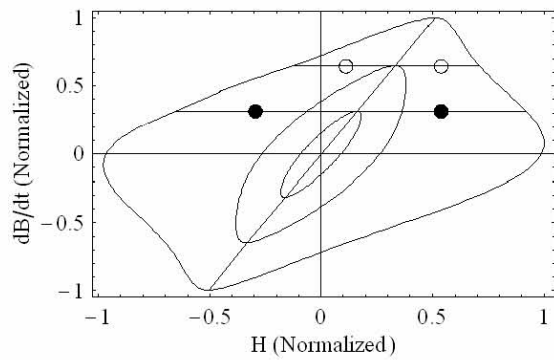
$$H = \pm \frac{\omega}{s} B_m \quad (13)$$

の関係が得られる。(13)式は、磁束密度  $B$  が正弦波状に変化しているときを、周期的磁化状態の  $dB/dt$  対磁界  $H$  ループ群の頂点を結んで得られる曲線から、パラメータ  $s$  が求まることを意味する。

以上の、(10),(12)式の関係を図 2(a)に示し、(11),(13)式の関係を図 2(b)に示す。



(a)  $\mu$  を与える曲線



(b)  $s$  を与える曲線

図 2

## 2.2. 新 Chua 型構成方程式

### 2.2.1. 磁化特性構成方程式の導出

図 3 に示すような短冊状磁区モデルを考える．外部磁界  $H$  が加わった場合，短冊状磁区の全個数  $N$  の中で  $N'$  個が外部磁界方向へ一致させたとき  $N'/N=n$  と正規化すれば，磁束密度  $B$  は次式で与えられる．

$$B = \mu_0 H + nB_s = \mu_0 + M \quad (14)$$

上式は，磁化率  $\chi_m = M/\mu_0$  を導入することで，

$$B = \mu_0 (1 + \chi_m) = \mu H \quad (15)$$

と変形される．さて，(15)式で透磁率  $\mu$  が過去の磁気履歴と無関係にユニークな値となる場合は，正方向と負方向の交流磁界で磁気履歴を打ち消して得られる理想磁化曲線の場合で

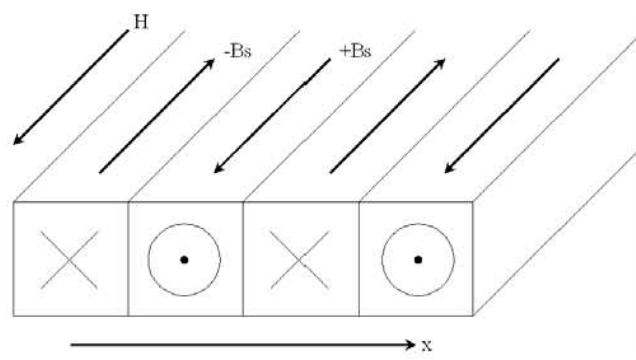


図3 短冊状磁区モデル

ある。(15)式では、この理想磁化曲線から得られる透磁率  $\mu$  をパラメータとして採用する。これは、磁化特性を表す構成方程式は結果として磁気履歴特性を呈するものであり、構成方程式のパラメータが過去の磁気履歴を含んでいてはならないためである。このとき、(15)式は明らかに静的な磁化特性を表すものであることに注意しなければならない。

次に動的な磁化特性を導入するために、ある磁区状態から他の磁区状態へ移行する場合を考えると、

$$\begin{aligned} \frac{dB}{dt} &= \mu_0 \left(1 + \frac{\partial n}{\partial H} \frac{B_s}{\mu_0}\right) \frac{dH}{dt} + \frac{\partial n}{\partial x} B_s \frac{dx}{dt} \\ &= \mu_r \frac{dH}{dt} + \frac{\partial n}{\partial x} B_s \frac{dx}{dt} \end{aligned} \quad (16)$$

であるから、磁壁の運動に起因する磁界は、パラメータとして  $s(\Omega/m)$  を導入して

$$\frac{1}{s} \left( \frac{dB}{dt} - \mu_r \frac{dH}{dt} \right) = \frac{1}{s} \frac{\partial n}{\partial x} B_s \frac{dx}{dt} \quad (17)$$

の関係を得る。ここで、 $s$  は結果として磁気履歴特性を表現するパラメータであるため、ヒステリシス係数と呼ぶ。さらに、可逆透磁率  $\mu_r$  は磁気履歴に無関係になるため、理想磁化曲線確定時に得られるものであり、また、理想磁化曲線測定時に使われる交流磁界の周波数は、磁壁の運動速度  $dx/dt$  が無視できるほど十分低くなければならない。(17)式は、明らかに動的な磁化特性を表しているから、同式と静的磁化特性を表す(15)式の和が全体の磁化特性を表すこととなる。すなわち、

$$H_{static} = \frac{1}{\mu} B \quad (18)$$

$$H_{dynamic} = \frac{1}{s} \left( \frac{dB}{dt} - \mu_r \frac{dH}{dt} \right) - \frac{1}{s} \frac{\partial n}{\partial x} B_0 \frac{dx}{dt} \quad (19)$$

であるから,  $H_{static} + H_{dynamic}$  は,

$$H_{total} = \frac{1}{\mu} B + \frac{1}{s} \frac{\partial n}{\partial x} B_s \frac{dx}{dt} \quad (20)$$

または,

$$H_{total} = \frac{1}{\mu} B + \frac{1}{s} \left( \frac{dB}{dt} - \mu_r \frac{dH}{dt} \right) \quad (21)$$

で与えられることとなる. ここで,  $H_{total}$  を一般的な形  $H$  で書き直すと,

$$H = \frac{1}{\mu} B + \frac{1}{s} \left( \frac{dB}{dt} - \mu_r \frac{dH}{dt} \right) \quad (22)$$

あるいは,

$$H + \frac{\mu_r}{s} \frac{dH}{dt} = \frac{1}{\mu} B + \frac{1}{s} \frac{dB}{dt} \quad (23)$$

と書くことができる. この(22)式が本論文で提唱する磁化特性の構成方程式であり, 新 Chua 型構成方程式と呼ぶ.

また, (20)式から,

$$H = \frac{1}{\mu} B + \frac{1}{s} B_s \frac{\partial n}{\partial x} \frac{dx}{dt} \quad (24)$$

となる. (24)式は明らかに動的な磁化状態が, 磁壁の運動速度  $v = dx/dt$  に依存する項と, 静的な磁区状態を表す右辺第1項からなることを意味する.

## 2.2.2. 透磁率 $\mu$ とヒステリシス係数 $s$

(22)式の新 Chua 型構成方程式で、透磁率  $\mu$  や可逆透磁率  $\mu_r$ 、さらにパラメータ  $s$  はそれぞれ一定値ではなく、 $\mu$  と  $\mu_r$  は理想磁化曲線測定時のバイアス（直流）磁束密度  $B$  の一価関数で表される。このことは、パラメータ  $s$  は、磁束密度の時間変化  $dB/dt$ 、磁界の時間変化  $dH/dt$  さらに磁束密度  $B$  ( $\mu_r$  が関数となるため)の一価関数で与えられることを意味する。実際に  $dB/dt-\mu_r dH/dt$  対  $H$  の関係を実測すると、図 4 のようになる。パラメータ  $s$  は、 $B=0$  のとき、

$$s = \frac{\frac{dB}{dt} - \mu_r \frac{dH}{dt}}{H} = \frac{1}{H} \frac{\partial n}{\partial x} B_s \frac{dx}{dt} \quad (25)$$

で与えられるから、 $dB/dt-\mu_r dH/dt$  の小さい部分ではパラメータ  $s$  が極めて小さい値となる。これは、磁壁の運動速度  $v=dx/dt$  が零に近いとき、ある種の閾値の磁界が存在することを意味し、物理的には各磁壁状態の静止摩擦に対応し、電気的には直流保磁力と呼ばれる磁界  $H_c$  に対応することを意味している。(6)式で与えられる古典 Chua 型構成方程式では、可逆透磁率  $\mu_r$  を無視していることが(22)式で与えられる新 Chua 型構成方程式との本質的な違いである。換言すれば、新 Chua 型構成方程式は、古典 Chua 型構成方程式を包含していることを意味する。したがって、新 Chua 型構成方程式が、もっとも厳密な磁化特性を表し、本論文で提唱する構成方程式である。これ以降の章ではこの新 Chua 型磁化特性モデルを、Chua 型磁化特性モデルと呼ぶこととする。

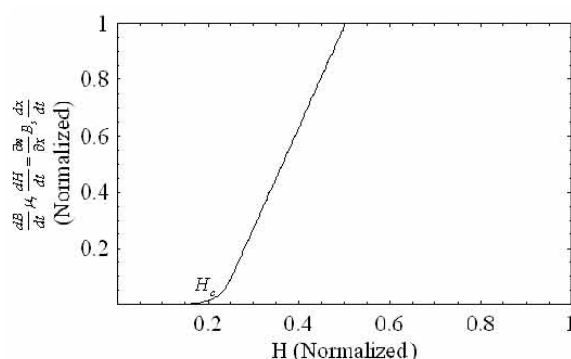


図 4 ヒステリシス係数  $s$  を与える曲線

### 3. 構成パラメータとその測定

本章では，Chua 型磁化特性モデルに用いられる構成パラメータの測定法を示し，それにより表現される磁性体特性の計算例を示す。

#### 3.1. 構成パラメータ

##### 3.1.1. 透磁率

Chua 型磁化特性モデルに用いられる構成パラメータの一つである透磁率は理想磁化曲線を用いている。理想磁化曲線とは，直流に交流磁界を重ねて磁化し，交流磁界を飽和にいたる大きな値から零まで減少して得られる点をトレースすることで得られる曲線である。この曲線は周波数や磁気履歴に依存せず一意的に決定される。また，Bozorth は，飽和領域まで達した周期的ヒステリシスループの上昇曲線 *b* と下降曲線 *a* の同一磁束密度 *B* に対する磁界 *H* の平均値をトレースした曲線が理想磁化曲線と極めてよく一致することを指摘しており，今回の実験ではそのようにして得られる理想磁化曲線を透磁率として用いている。

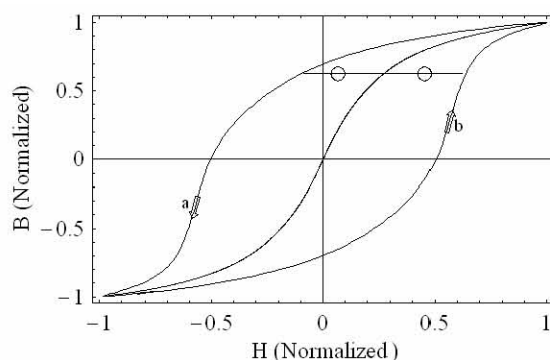


図5 理想磁化曲線の性質

##### 3.1.2. 可逆透磁率

図6に示すように磁界 *H* を増加中に反転させた後再び増加するとマイナーループを描く。いま，磁界 *H* と磁束密度 *B* それぞれの増分  $\Delta H$  と  $\Delta B$  を図中のように定義すれば，増分透磁率は

$$\mu_{\Delta} = \frac{\Delta B}{\Delta H} \quad (26)$$

で定義される。(26)式で  $\Delta H$  を小さくしていくと、マイナーループの囲む面積は小さくなり、最終的には直線となる。この直線となった状態では、可逆的な磁化過程となる。このとき、

$$\mu_r = \lim_{\Delta H \rightarrow 0} \frac{\Delta B}{\Delta H} \quad (27)$$

を可逆透磁率という。しかし、この可逆透磁率は過去の履歴に依存してしまう。そこで Chua 型磁化特性モデルに用いる構成パラメータ  $\mu_r$  を一意的に決定するため、理想磁化曲線測定時に得られる可逆透磁率を用いる。

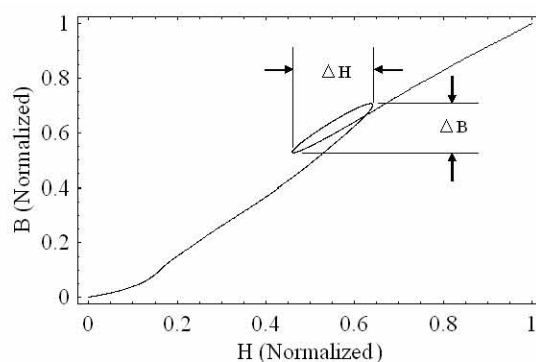


図 6 マイナーループ

### 3.1.3. ヒステリシス係数

ヒステリシス係数  $s$  は磁束密度  $B=0$  時のサーチコイル誘起電圧より  $dB/dt$  と電流波形より  $dH/dt$  を求めることで決定できる。磁束密度  $B=0$  時の磁界  $H$  は、保磁力  $H$  に対応するから(23)式よりヒステリシス係数は、

$$s = \frac{1}{H_c} \left( \frac{dB}{dt} - \mu_r \frac{dH}{dt} \right) \quad (28)$$

となる。結果として、励磁電圧を変化させ、磁束密度  $B=0$  時の  $dB/dt$  と  $dH/dt$  より、ヒステリシス係数  $s$  が求まる。また、可逆透磁率  $\mu_r$  は  $B=0$  のとき最大となるためヒステリシス係数を求めるときに使用する値は最大可逆透磁率である。このヒステリシス係数もまた透磁率、可逆透磁率と同様に一意的に決定される。

### 3.2. シミュレーション

#### 3.2.1. 実験回路と構成パラメータの実験値

図 7 に示す回路を用い、軟鉄における構成パラメータを測定すると、図 8,9,10 に示す曲線を得ることができる。このパラメータを用い磁性体の特性のシミュレーションを行う。

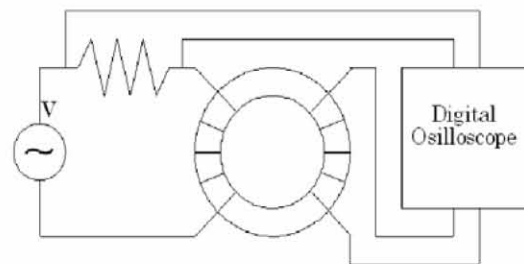


図 7 実験回路

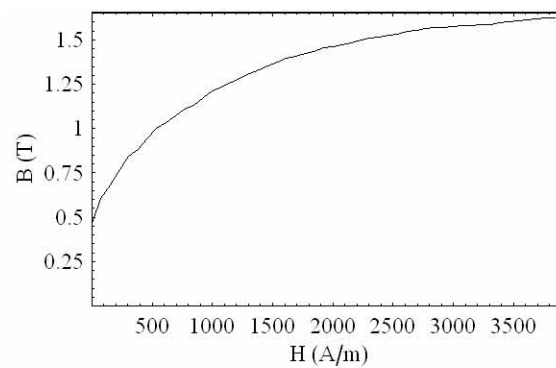


図 8 透磁率  $\mu$  を与える曲線 (軟鉄)



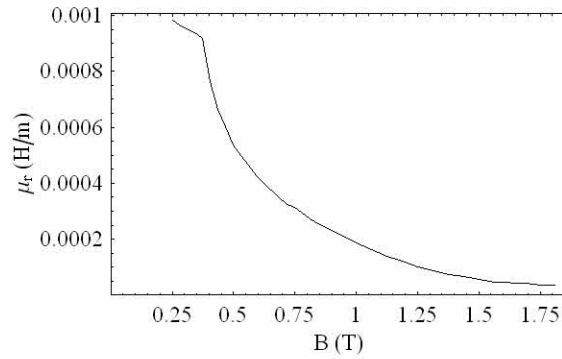


図9 可逆透磁率  $\mu_r$  (軟鉄)

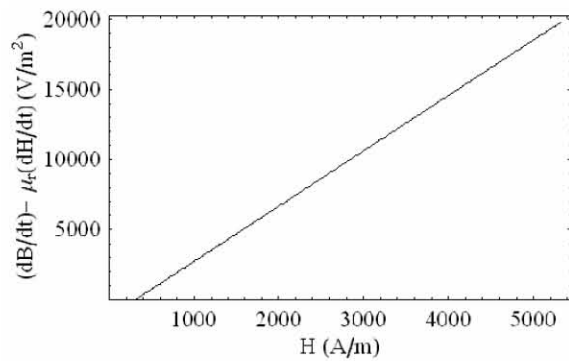


図10 ヒステリシス係数  $s$  を与える曲線 (軟鉄)

### 3.2.2. 周波数特性

図11における  $R$ - $L$  直列回路に 10,50,100Hz の周波数の電圧を印加すると、図12に示すような  $B$ - $H$  ループを描く。通常  $B$ - $H$  ループは高周波になるほど、損失が増えループ幅が大きくなる特性を持つが、シミュレーション結果もまた同様の傾向を示していることがわかる。

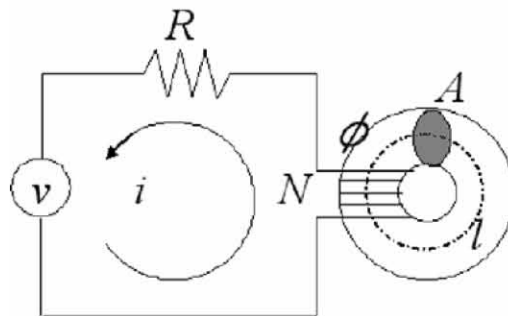
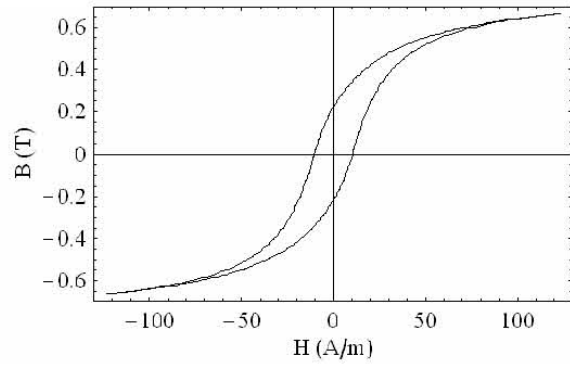
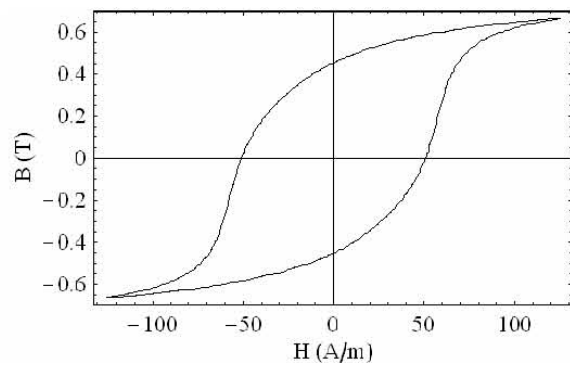


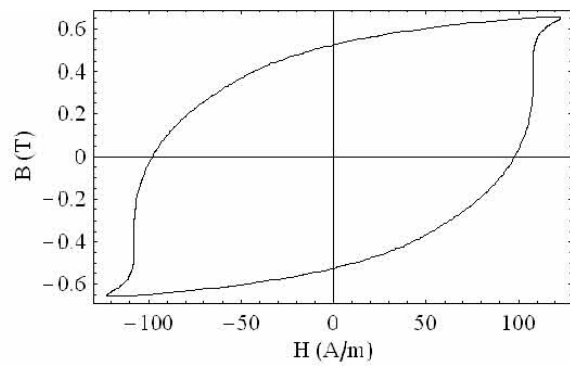
図11  $R$ - $L$  直列回路



(a) 10Hz



(b) 50Hz



(c) 100Hz

図 12  $B$ - $H$  ループの周波数特性

### 3.2.3. マイナーループ

次に図 11 における  $R$ - $L$  直列回路に, 図 13 のような交流電圧に徐々に上昇するような直流電圧を重ねた入力信号を印加したところ図 14 に示す  $B$ - $H$  ループを描く. このループはマイナーループを描いており, 実際の磁性体と同様の現象を示している. また, 図 14,15 は回路に流れる電流と, 磁性体内における磁束である.

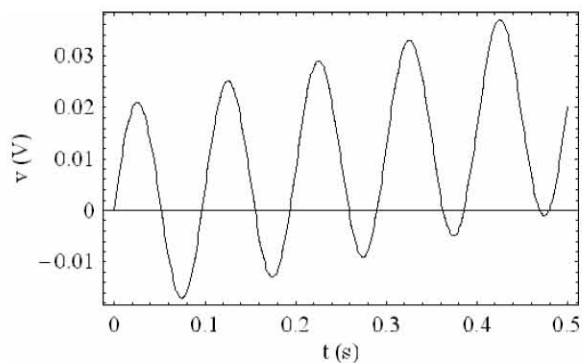


図 13 印加電圧  $v$

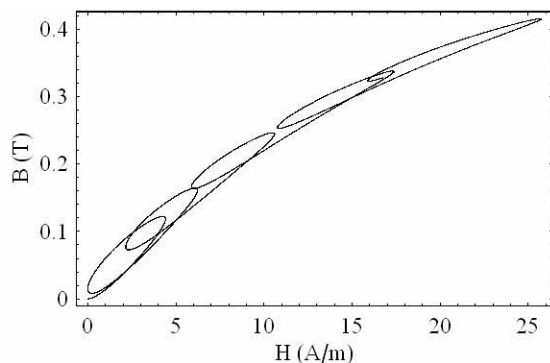


図 14 マイナーループ

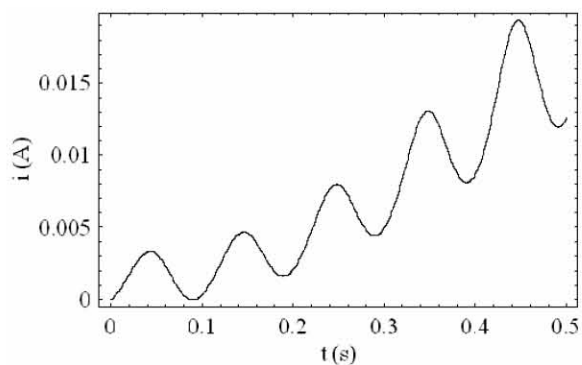


図 15 電流  $i$

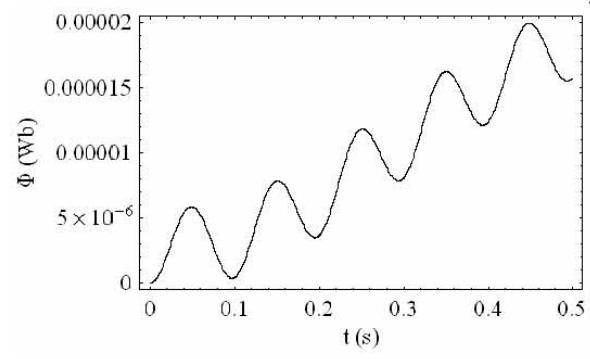


图 16 磁束  $\Phi$

## 4. 電気機器への応用

本章では、Chua 型磁化特性モデルをさまざまな電気機器に適用し、その計算値と実験値との比較を行い理論の妥当性を検証する。

### 4.1. 直列鉄共振回路

#### 4.1.1. 直列鉄共振回路の定式化

図11のトロイダルコアを含んだR-L回路に、直列にコンデンサCを接続した図17のR-L-C直列回路では、通常のR-L-C直列回路とは異なった共振現象すなわち鉄共振現象を呈する。電源電圧を徐々に増加すると、ある電圧 $v$ で急激に電流が増加し、直列共振が始まるが、この状態から電圧を下げて直ちに共振は停止せずに持続し、履歴現象を呈する。あるいは、電圧一定で周波数を変化させた場合も同様の現象がおきる。図17の直列鉄共振回路にChua型構成方程式を適用し解析を行う。

Chua 型構成方程式(23)式を、図17におけるトロイダルコアの磁路 $l$ に関して周回積分を行うと、

$$\int_0^l H + \frac{\mu_r}{s} \frac{dH}{dt} dl = \int_0^l \frac{1}{\mu} B + \frac{1}{s} \frac{dB}{dt} dl \quad (29)$$

$$Ni + \frac{\mu_r}{s} N \frac{di}{dt} = \frac{l}{\mu A} \phi + \frac{l}{sA} \frac{d\phi}{dt} \quad (30)$$

を得る。また、図17における電流 $i$ とその時間微分 $di/dt$ は、

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{1}{R} \left( v - \frac{q}{C} - N \frac{d\phi}{dt} \right) \quad (31)$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{1}{R} \left( \frac{dv}{dt} - \frac{1}{C} \frac{dq}{dt} - N \frac{d^2\phi}{dt^2} \right) \quad (32)$$

で与えられる。(30)式に(31),(32)式を代入すると、

$$\frac{\mu_r}{s} \frac{d^2 \lambda}{dt^2} + \left(1 + \frac{lR}{sAN^2} - \frac{\mu_r}{sRC}\right) \frac{d\lambda}{dt} + \frac{lR}{\mu AN^2} \lambda = \frac{\mu_r}{s} \frac{dv}{dt} + \left(1 - \frac{\mu_r}{sRC}\right) v \quad (33)$$

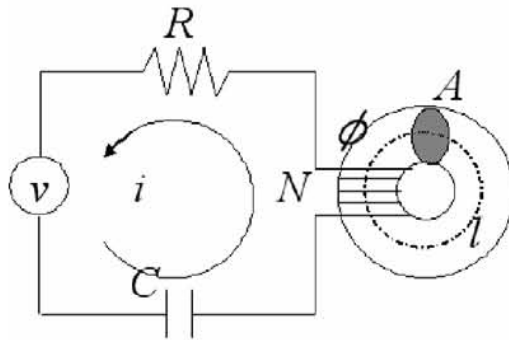
を得られる。(31),(33)式を状態遷移行列で記述すれば、1階連立微分方程式

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \lambda \\ \dot{\lambda} \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \dot{\lambda} \\ q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{pmatrix} \quad (34)$$

あるいは、

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x} = \mathbf{a}\mathbf{x} + \mathbf{b}(t) \quad (35)$$

を得る。(35)式を後方オイラー法で離散化し、鉄共振回路の過渡現象を計算する。



- $A$ : 鎖交面積 ( $\text{m}^2$ )
- $C$ : キャパシタンス (F)
- $i$ : 電流 (A)
- $l$ : 磁路長 (m)
- $N$ : 巻数
- $q$ : 電荷
- $R$ : 抵抗 ( $\Omega$ )
- $v$ : 入力電圧 (V)
- $\Phi$ : 磁束 (Wb)
- $\lambda$ : 鎖交磁束 (Wb) ( $=N\Phi$ )

図 17 直列鉄共振回路

#### 4.1.2. 後方オイラー法と最適刻み幅の決定

数値解析を行う上で、刻み幅は非常に重要な意味を持つ。本論文で計算を行っている鉄共振現象は非線形な現象であり、時間ごとに変化量が大きく変化する。そのためその時間における最適な刻み幅を適用するため、図 18 に示すようなアルゴリズムを用い、刻み幅を決定した。この方法では、刻み幅を  $\Delta t$  としたときの解と刻み幅を  $\Delta t/2$  としたときの解とを比較しその差が許容誤差  $\varepsilon$  より小さくなるとき、そのときの値を解とし、逆に大きい場合は、

刻み幅を半分とし同様の計算を行い、最適な刻み幅を用いて解を決定していく。

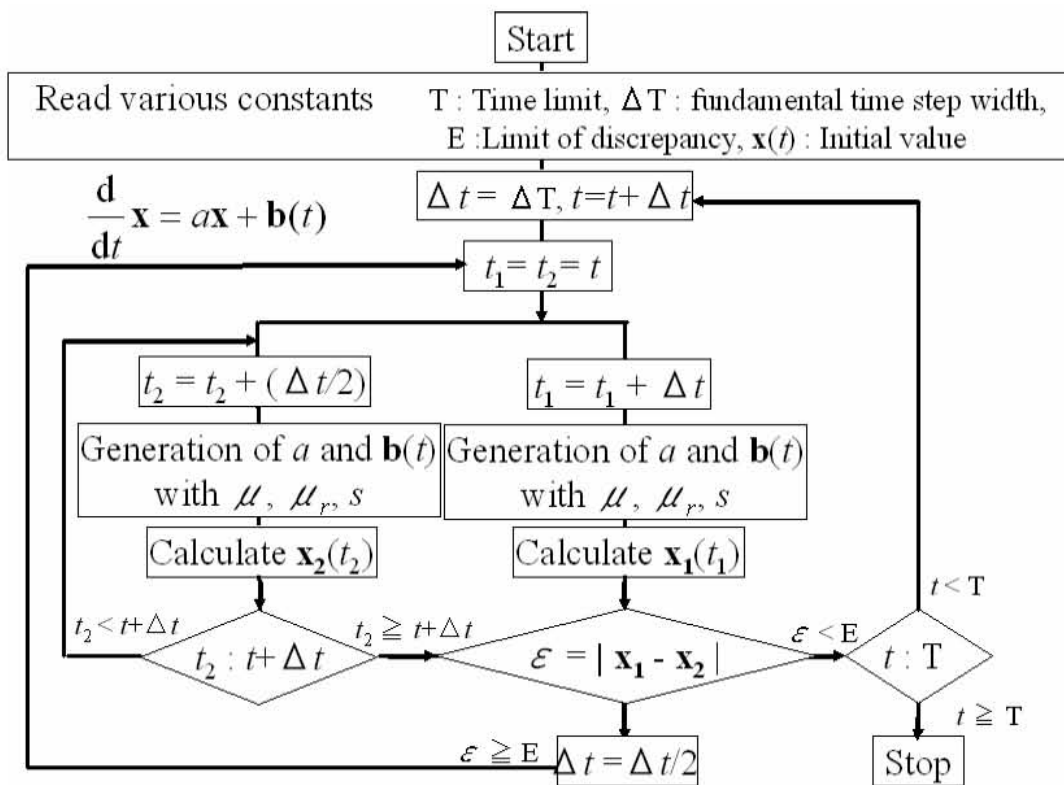


図 18 刻み幅最適化のためのアルゴリズム

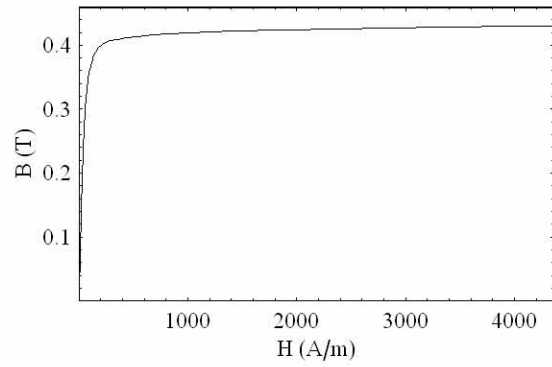
### 4.1.3. 実験的検証と数値シミュレーション

図 19 は実験に用いたフェライト(TDK H5A)の構成パラメータであり，解析は表 1 に示す定数を用いて行った．入力電圧として図 20 示す 1kHz の周波数で 0.02s まで振幅が徐々に上昇しその後減少していくような振幅変調の信号と，図 22 に示す振幅一定で周波数が徐々に上昇し 0.01s まで減少し以降，周波数が上昇する周波数変調の信号，及び図 24 に示す，周波数が徐々に減少し共振が開始したと同時に周波数を一定とし共振を持続させる信号を印加したところ，図 21,23,25 に示す結果となった．振幅変調，周波数変調の信号では入力電圧が左右対称であるにもかかわらず，出力電流  $i$  は左右非対称となっており共振が持続していることが明らかとなっている．また，実験値と計算値を比較したところよく一致しており，Chua 型磁化特性モデルの妥当性を示していることがわかる．

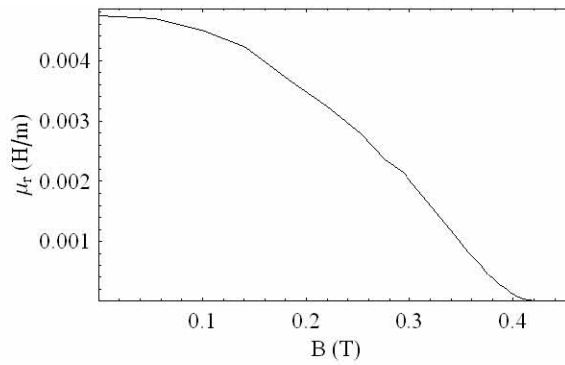
表 1 直列鉄共振回路パラメータ

$\mu$ : 透磁率 (H/m)	図 19(a)
$\mu_r$ : 可逆透磁率(H/m)	図 19(b)
$s$ : ヒステリシス係数 ( $\Omega/m$ )	図 19(c)
$A$ : 鎖交面積 ( $m^2$ )	$48.0 \times 10^{-6}$
$C$ : キャパシタンス (F)	$1.0 \times 10^{-6}$
$l$ : 磁路長 (m)	$75.4 \times 10^{-3}$
$N$ : 巻数	100
$R$ : 抵抗 ( $\Omega$ )	1.0
$r$ : 内部抵抗 ( $\Omega$ )	0.4
$\varepsilon$ : 許容誤差	$1.0 \times 10^{-5}$

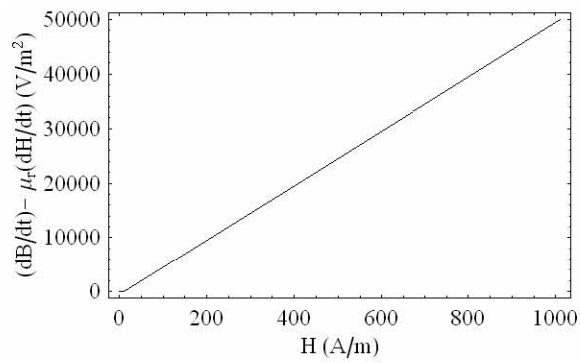




(a) 透磁率  $\mu$



(b) 可逆透磁率  $\mu_r$



(c) ヒステリシス係数  $s$

図 19 構成パラメータ (TDK H5A)

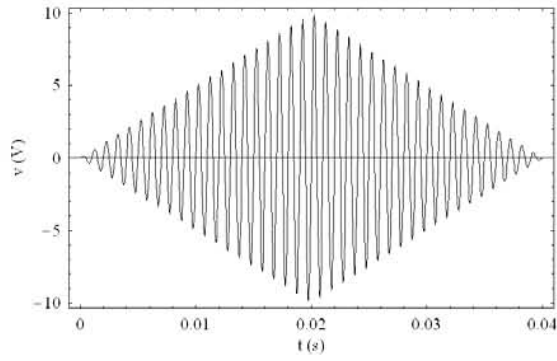
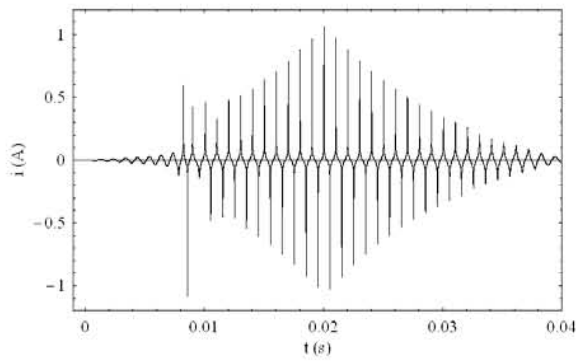
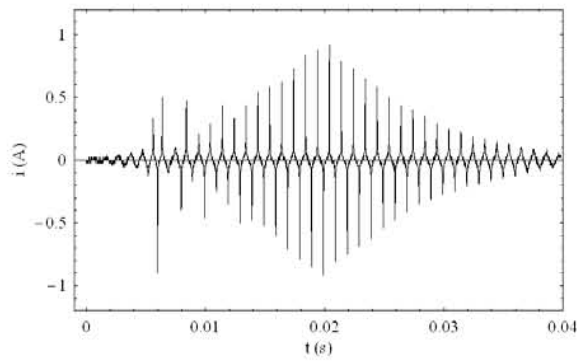


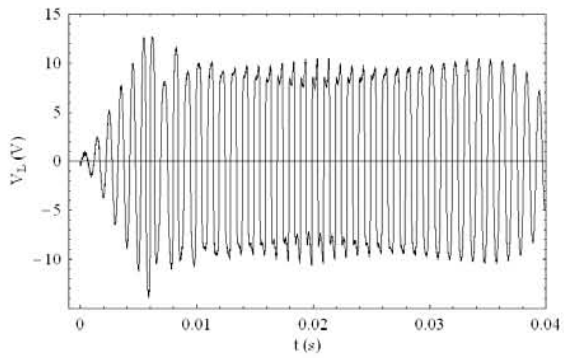
図 20 入力電圧  $v$  (振幅変調)



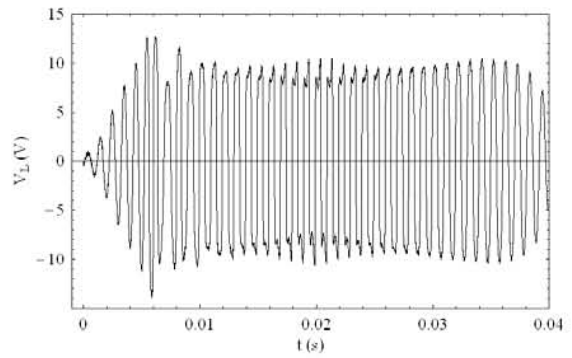
(a) 電流  $i$  (計算値)



(b) 電流  $i$  (実験値)



(c) 電圧  $V_L$  (計算値)



(d) 電圧  $V_L$  (実験値)

図 21 計算値と実験値 (振幅変調)

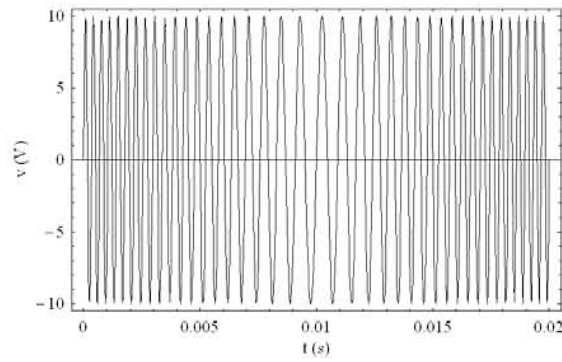
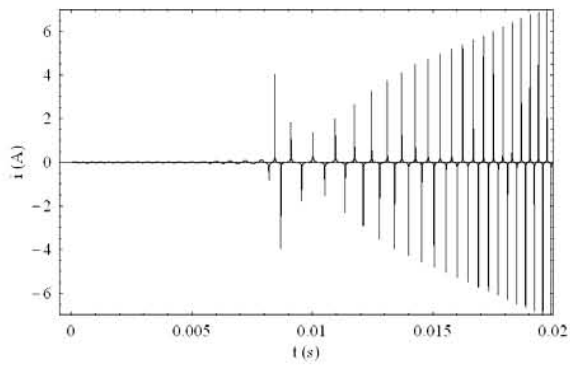
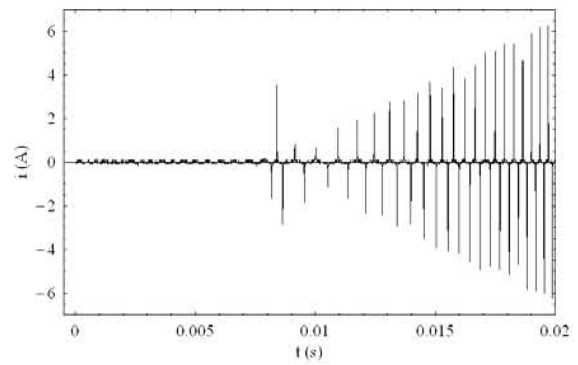


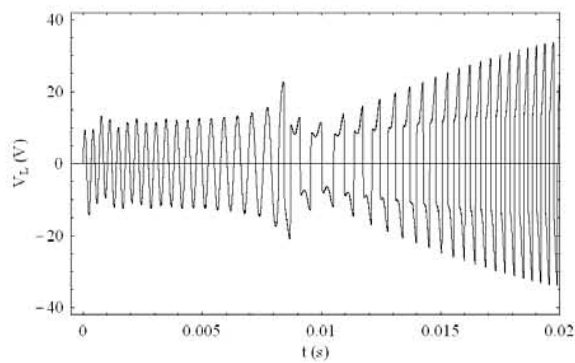
図 22 入力電圧  $v$  (周波数変調)



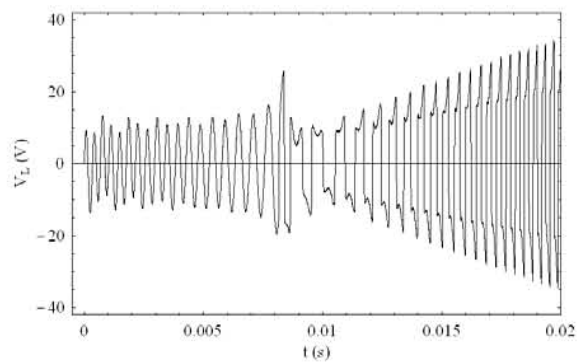
(a) 電流  $i$  (計算値)



(b) 電流  $i$  (実験値)



(c) 電圧  $V_L$  (計算値)



(d) 電圧  $V_L$  (実験値)

図 23 計算値と実験値 (周波数変調)

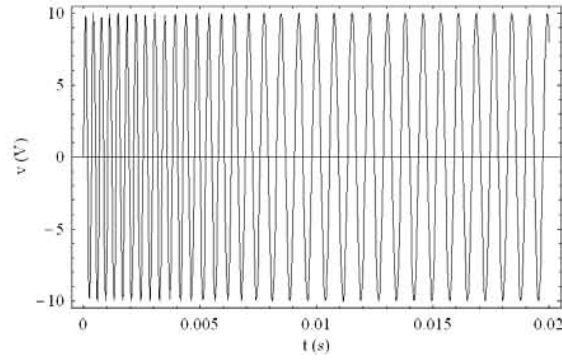
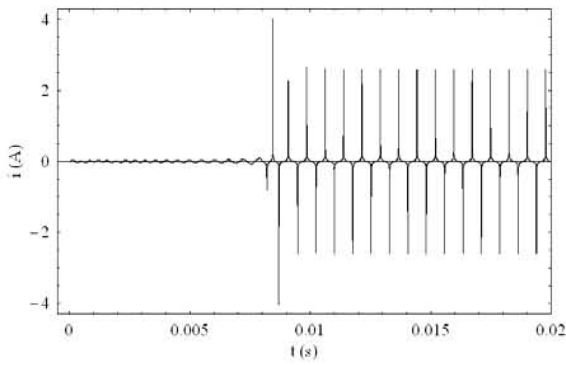
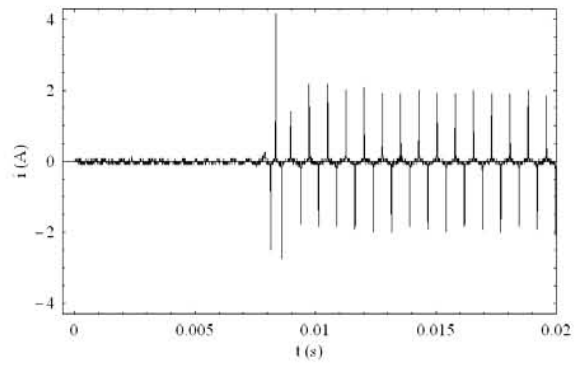


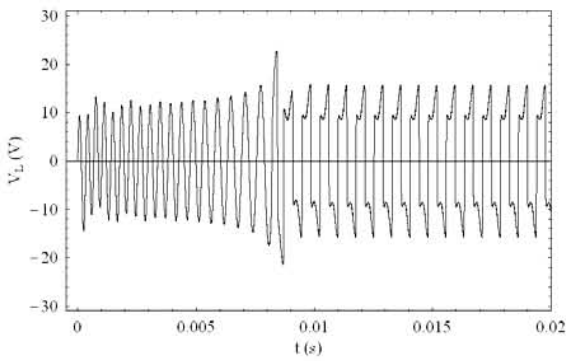
図 24 入力電圧  $v$  (共振持続)



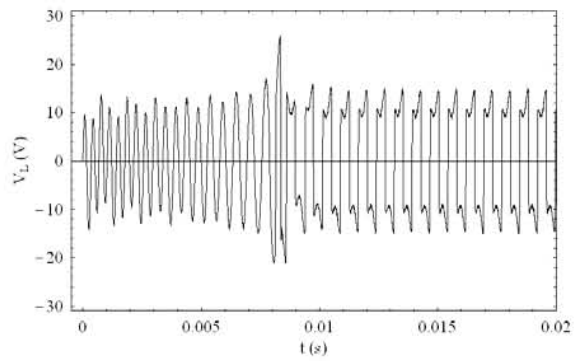
(a) 電流  $i$  (計算値)



(b) 電流  $i$  (実験値)



(c) 電圧  $V_L$  (計算値)

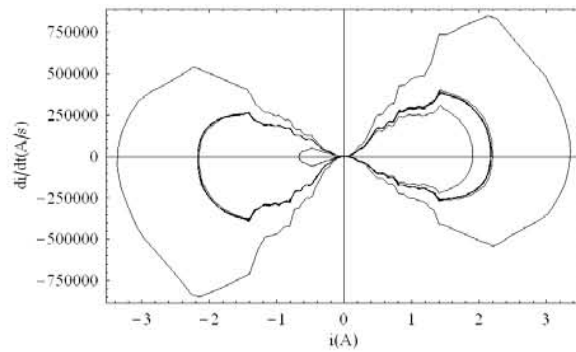


(d) 電圧  $V_L$  (実験値)

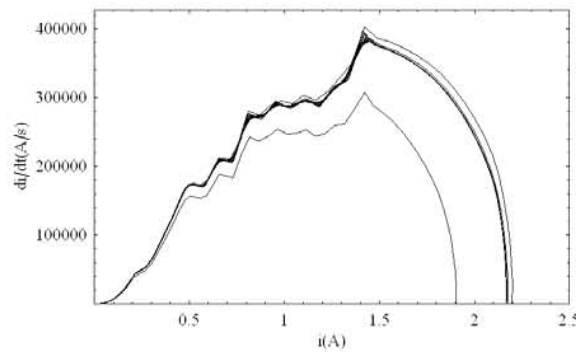
図 25 計算値と実験値 (共振持続)

#### 4.1.4. ポアンカレ図

図 26 は、図 25 に示す共振を持続させたときの過渡解析結果を用いて、縦軸に電流の時間微分値  $di/dt$ 、横軸に電流  $i$  をプロットしたポアンカレ図である。図 25(b)より、周波数一定で駆動している  $t=0.00845\text{s}$  以降においても、 $di/dt$  対  $i$  の関係は一定の軌跡を通らない。これは、鉄共振現象がカオス的振る舞いを呈することを可視化したのみならず、Chua 型磁化特性モデルから導かれた微分方程式を用いて、カオス現象が可視化されることを意味する。



(a)  $t=0.0\text{s}\sim 0.02\text{s}$



(b)  $t=0.00845\text{s}\sim 0.02\text{s}$

図 26 ポアンカレ図

#### 4.1.5. 固有値

状態変数方程式における状態遷移行列の固有値は、本来線形な系にのみ適用できる概念であるが、本論文では、固有値解析法を非線形な系に対して区間線形化近似を適用し、系の状態推移を考察する。

鉄共振回路システムの状態推移特性を考察するため、式(35)に置ける状態遷移行列  $a$  の固有値を時間刻み幅ごとに計算し、時間軸を共通軸とし、縦・横軸に固有値の実部と虚部を取り3次元的に固有値の時間変化を可視化する。図27は状態遷移行列  $a$  の固有値の時間変化である。式(35)の行列  $a$  は3行3列の正方行列であるから3個の固有値を持つ。いずれの固有値も共振持続時にカオス的な出力信号に揺らぎが生じているにもかかわらず一定の軌跡を辿っている。これはカオス現象を喚起するのは、式(35)右辺の入力電圧に関する項となることを意味している。式(34)の右辺のパラメータは、 $\mu_r s$  であるが、 $\mu_r / s$  は保磁力  $H_c$  に関する[1,3]。よって、保磁力の相違がカオス的な状態を喚起すると考えられる。

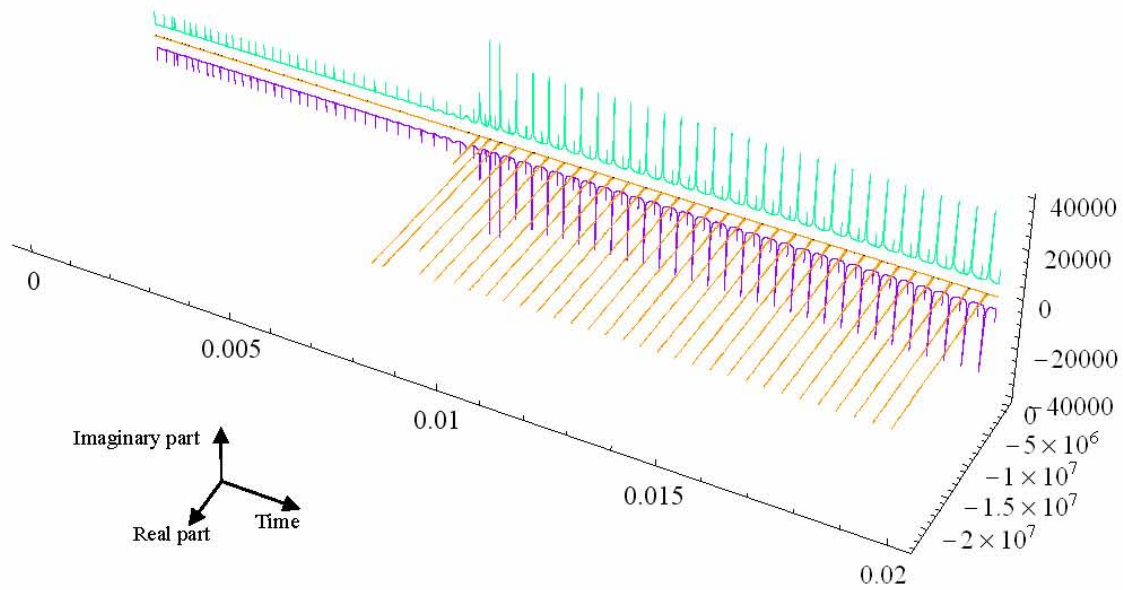


図27 固有値

## 4.2. 並列鉄共振回路

### 4.2.1. 並列鉄共振回路の定式化

Chua 型構成方程式(23)式を, 図 28 におけるトロイダルコアの磁路  $l$  に関して周回積分を行うと,

$$\int_0^l H + \frac{\mu_r}{s} \frac{dH}{dt} dl = \int_0^l \frac{1}{\mu} B + \frac{1}{s} \frac{dB}{dt} dl \quad (36)$$

$$Ni + \frac{\mu_r}{s} N \frac{di}{dt} = \frac{l}{\mu A} \phi + \frac{l}{sA} \frac{d\phi}{dt} \quad (37)$$

を得る. また, 図 28 における電流  $i_1$  とその時間微分  $di_1/dt$  及び  $V_{out}$  は,

$$i_1 = \frac{1}{r} (V_{out} - N \frac{d\phi}{dt}) \quad (38)$$

$$\frac{di_1}{dt} = \frac{1}{r} \left( \frac{dV_{out}}{dt} - N \frac{d^2\phi}{dt^2} \right) \quad (39)$$

$$\frac{dV_{out}}{dt} = \frac{N}{rc} \frac{d\phi}{dt} - \left( \frac{1}{RC} + \frac{1}{rC} \right) V_{out} + \frac{1}{RC} v \quad (40)$$

で与えられる. 次に, (37)式に(38),(39),(40)式を代入すると,

$$\begin{aligned} \frac{\mu_r N}{sr} \frac{d^2\lambda}{dt^2} = \\ \left\{ -\frac{N}{r} + \frac{\mu_r N}{sR^2C} - \frac{l}{sAN} \right\} \frac{d\lambda}{dt} - \frac{l}{\mu AN} \lambda + \left\{ \frac{N}{r} - \frac{\mu_r N}{sr} - \left( \frac{1}{RC} + \frac{1}{rC} \right) \right\} V_{out} + \frac{\mu_r N}{srRC} v \end{aligned} \quad (41)$$

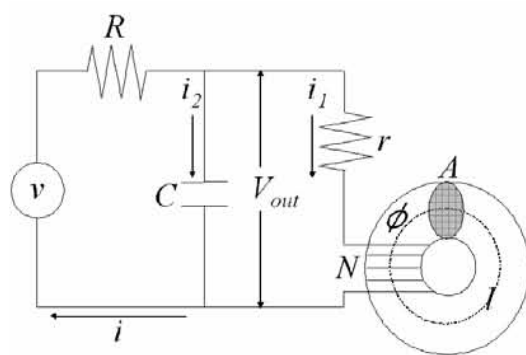
を得られる. (40),(41)式を状態遷移行列で記述すれば, 1階連立微分方程式

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \lambda \\ \dot{\lambda} \\ V_{out} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \dot{\lambda} \\ V_{out} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \quad (42)$$

あるいは,

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x} = \mathbf{a}\mathbf{x} + \mathbf{b}(t) \quad (43)$$

を得る。直列鉄共振回路と同様に、(43)式を後方オイラー法で離散化し、過渡現象を計算する。



- $A$ : 鎖交面積 ( $\text{m}^2$ )
- $V_{out}$ : 出力電圧 (V)
- $i$ : 電流 (A)
- $l$ : 磁路長 (m)
- $N$ : 巻数
- $R$ : 抵抗 ( $\Omega$ )
- $r$ : 内部抵抗 ( $\Omega$ )
- $v$ : 入力電圧 (V)
- $\Phi$ : 磁束 (Wb)
- $\lambda$ : 鎖交磁束 (Wb) ( $=N\Phi$ )

図 28 並列鉄共振回路



#### 4.2.2. 実験的検証と数値シミュレーション

直列鉄共振回路と同様に，並列鉄共振回路でも図 29,31,33 で示す振幅変調，周波数変調，共振を持続させる信号の印加を行った．図 30,32,34 で示す結果を見ると，直列鉄共振回路と同様左右対称な入力信号であるにもかかわらず，左右非対称な出力信号となっている．また実験値と計算値との比較においても非常によく一致していることがわかる．

表 2 並列鉄共振回路パラメータ

$\mu$ : 透磁率 (H/m)	図 19(a)
$\mu_r$ : 可逆透磁率(H/m)	図 19(b)
$s$ : ヒステリシス係数 ( $\Omega/m$ )	図 19(c)
$A$ : 鎖交面積 ( $m^2$ )	$48.0 \times 10^{-6}$
$C$ : キャパシタンス (F)	$1.0 \times 10^{-6}$
$l$ : 磁路長 (m)	$75.4 \times 10^{-3}$
$N$ : 巻数	100
$R$ : 抵抗 ( $\Omega$ )	272.0
$r$ : 内部抵抗 ( $\Omega$ )	0.4
$\varepsilon$ : 許容誤差	$1.0 \times 10^{-5}$

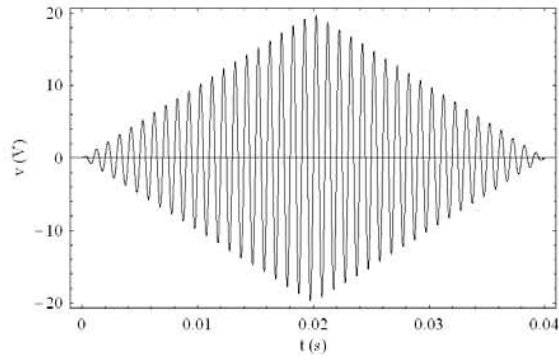
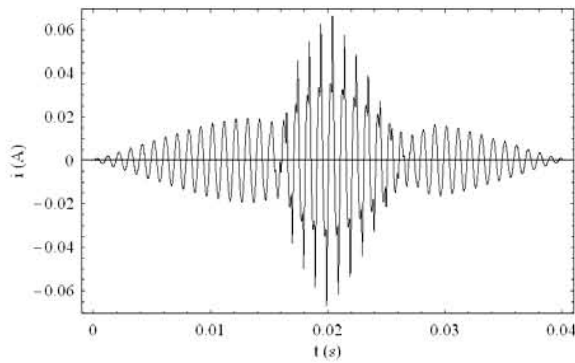
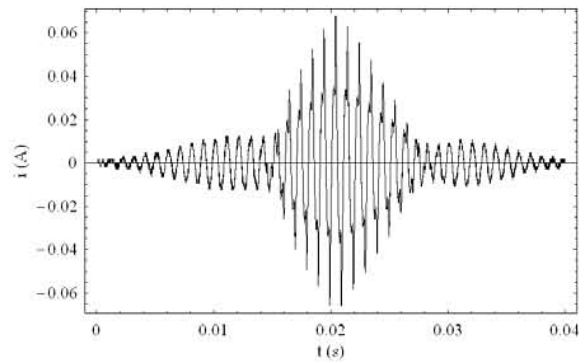


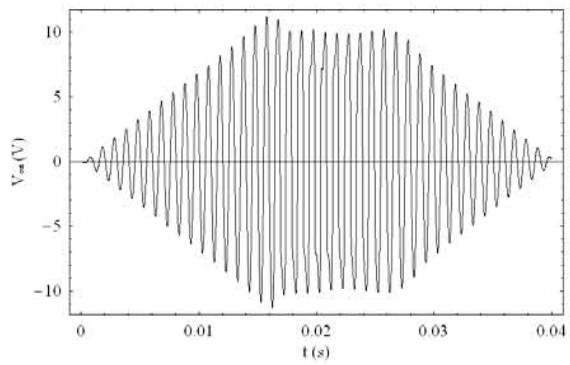
図 29 入力電圧  $v$  (振幅変調)



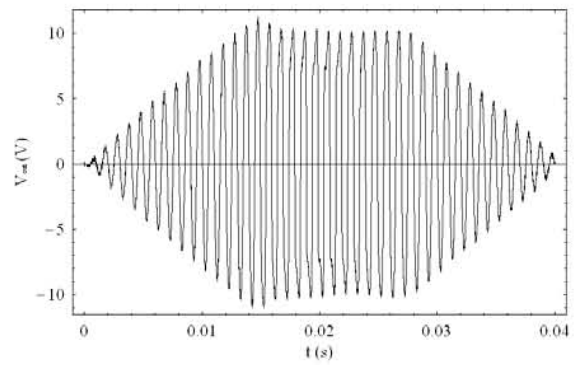
(a) 電流  $i$  (計算値)



(b) 電流  $i$  (実験値)



(c) 電圧  $V_{out}$  (計算値)



(d) 電圧  $V_{out}$  (実験値)

図 30 計算値と実験値 (振幅変調)

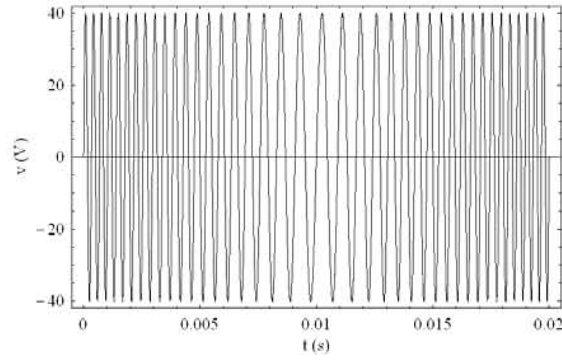
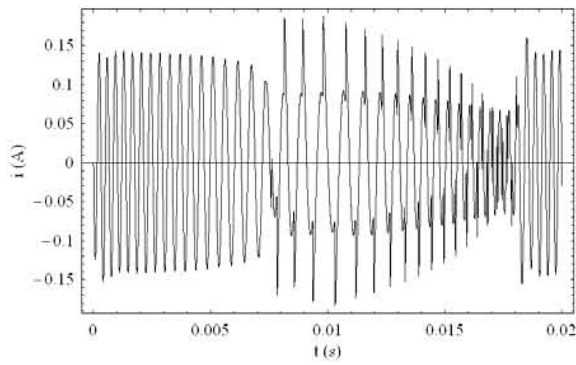
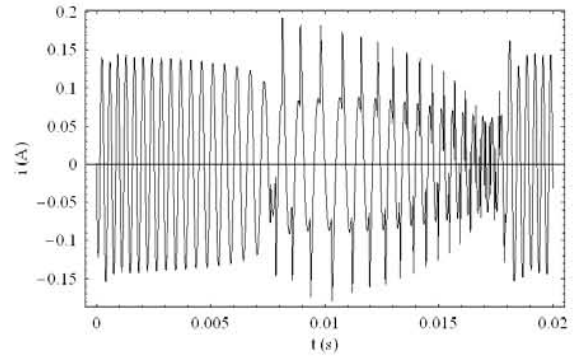


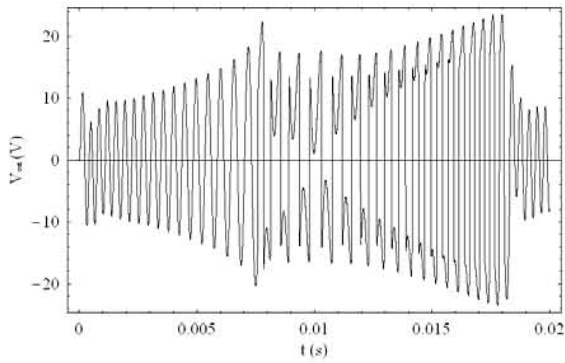
図 31 入力電圧  $v$  (周波数変調)



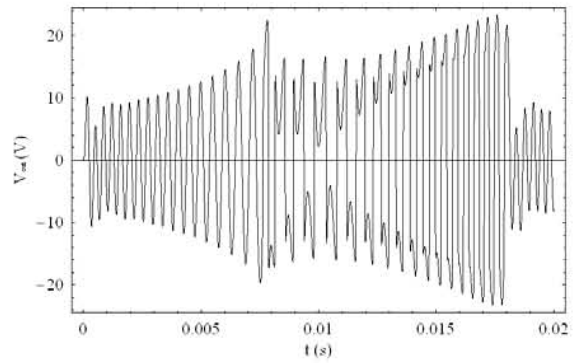
(a) 電流  $i$  (計算値)



(b) 電流  $i$  (実験値)



(c) 電圧  $V_{out}$  (計算値)



(d) 電圧  $V_{out}$  (実験値)

図 32 計算値と実験値 (周波数変調)

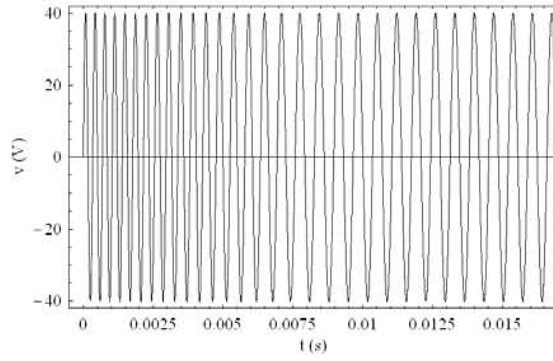
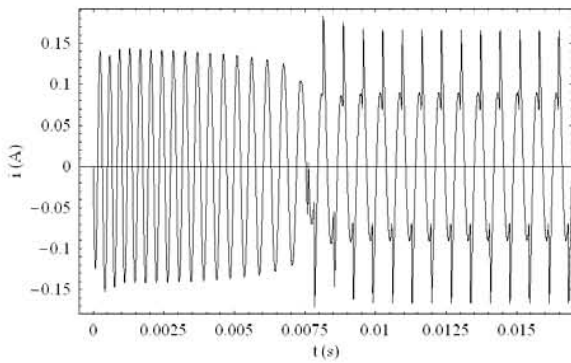
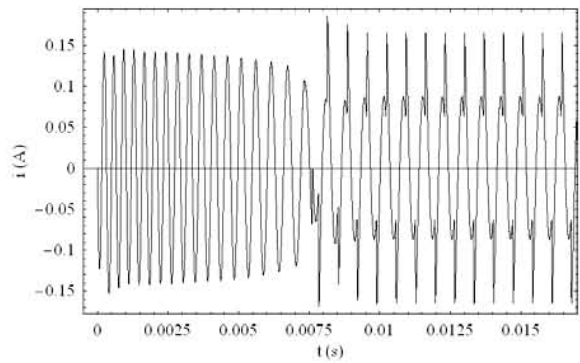


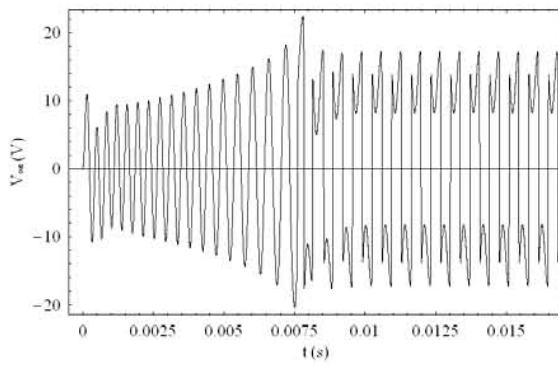
図 33 入力電圧  $v$  (共振持続)



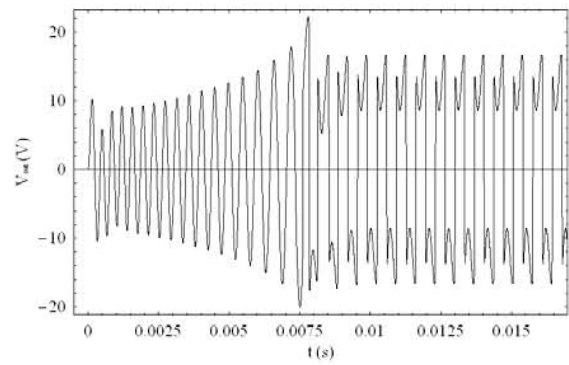
(a) 電流  $i$  (計算値)



(b) 電流  $i$  (実験値)



(c) 電圧  $V_{out}$  (計算値)

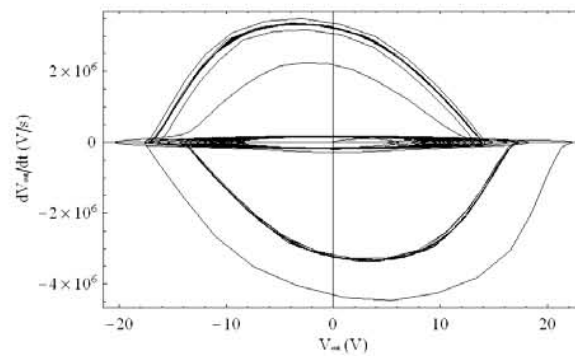


(d) 電圧  $V_{out}$  (実験値)

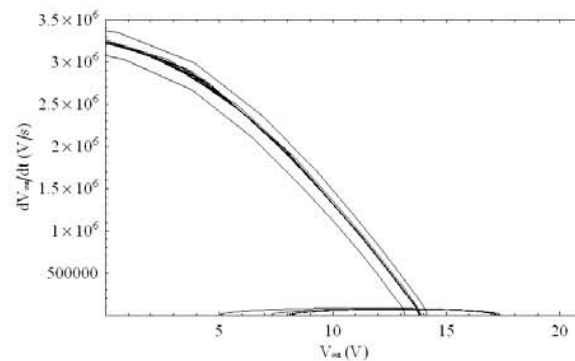
図 34 計算値と実験値 (共振持続)

### 4.2.3. ポアンカレ図

直列鉄共振回路と同様に、図 34 で示す出力電圧  $V_{out}$  よりポアンカレ図を描いた。その結果、並列鉄共振回路でもまた、 $t=0.0078s$  以降一定の入力を与えているにもかかわらず、鉄共振現象がカオス的振る舞いを呈していることが判明した。また図 26(b)に示す直列鉄共振回路のポアンカレ図と図 35(b)に示す並列鉄共振回路のポアンカレ図を比較すると、両者ともカオス的な振る舞いを呈しているが、前者のほうがより不安定な動きをしているのが見て取れる。これは、定電圧源として用いられる並列鉄共振回路のほうがより安定な電源になりえることを示している。



(a)  $t=0.0s\sim 0.017 s$



(b)  $t=0.0078s\sim 0.017 s$

図 35 ポアンカレ図

#### 4.2.4. 固有値

図 36 は式(43)に置ける状態遷移行列  $a$  より同様に固有値を計算した結果である。いずれの固有値も共振持続時に出力信号がカオス的揺らぎを生じているにもかかわらず、一定の軌跡を通っている。3 個の固有値の実数部は常に負の値であり、直列鉄共振回路と同様並列鉄共振回路もまた、非常に安定なシステムであることが見て取れる。

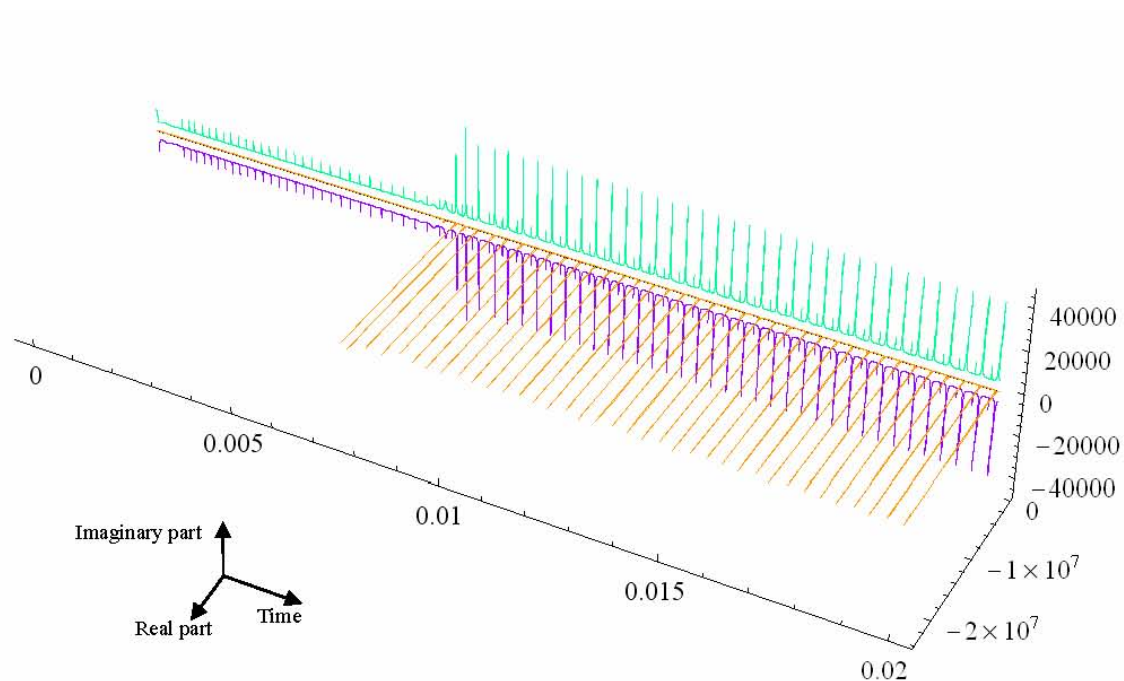


図 36 固有値

### 4.3. 変圧器

#### 4.3.1. 変圧器回路の定式化

Chua 型構成方程式(23)式を, 図 37 におけるトロイダルコアの磁路  $l$  に関して周回積分を行うと,

$$\int_0^l H + \frac{\mu_r}{s} \frac{dH}{dt} dl = \int_0^l \frac{1}{\mu} B + \frac{1}{s} \frac{dB}{dt} dl \quad (44)$$

$$N_1 i_1 - N_2 i_2 + \frac{\mu_r}{s} (N_1 \frac{di_1}{dt} - N_2 \frac{di_2}{dt}) = \frac{l}{\mu A} \phi + \frac{l}{sA} \frac{d\phi}{dt} \quad (45)$$

を得る. 図(37)に示す回路より,  $i_1, i_2$  は(46),(47)式で表される.

$$i_1 = (v - N_1 \frac{d\phi}{dt}) / (R_1 + r_1) \quad (46)$$

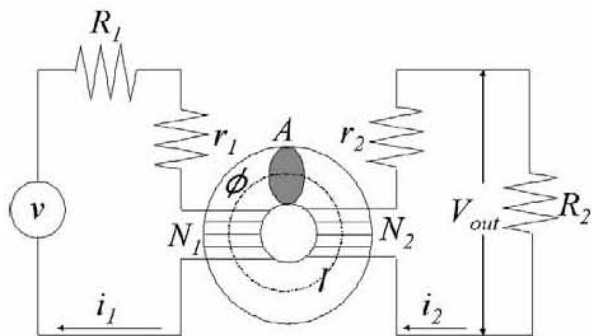
$$i_2 = N_2 \frac{d\phi}{dt} / (R_2 - r_2) \quad (47)$$

(45)式に(46),(47)式を代入すると

$$\begin{aligned} \frac{\mu_r}{s} \left( \frac{N_1^2}{R_1 + r_1} + \frac{N_2^2}{R_2 + r_2} \right) \frac{d^2 \phi}{dt^2} = \\ - \left( \frac{N_1^2}{R_1 + r_1} + \frac{N_2^2}{R_2 + r_2} + \frac{l}{sA} \right) \frac{d\phi}{dt} - \frac{l}{\mu A} \phi + \frac{N_1}{R_1 + r_1} v + \frac{\mu_r N_1}{s(R_1 + r_1)} \frac{dv}{dt} \end{aligned} \quad (48)$$

を得る.

鉄共振回路と同様に, 後方オイラー法を用い過渡解析を行う.



- $A$ : 鎖交面積 ( $m^2$ )
- $V_{out}$ : 出力電圧 (V)
- $i_1$ : 一次電流 (A)
- $i_2$ : 二次電流 (A)
- $l$ : 磁路長 (m)
- $N_1$ : 一次卷数
- $N_2$ : 二次卷数
- $R_1$ : 一次抵抗 ( $\Omega$ )
- $R_2$ : 二次抵抗 ( $\Omega$ )
- $r_1$ : 一次内部抵抗 ( $\Omega$ )
- $r_2$ : 二次内部抵抗 ( $\Omega$ )
- $v$ : 入力電圧 (V)
- $\Phi$ : 磁束 (Wb)

图 37 变压器回路



### 4.3.2. 実験的検証と数値シミュレーション

図 39,40 は，二次側抵抗  $R_2$  に  $30,90\Omega$  の抵抗を接続し，図 38 に示す入力電圧を図 37 の回路に印加したときの応答である．実験値と計算値は比較的一致しており，かつ変圧器の過渡特性を示していることがよくわかる．この結果から，Chua 型磁化特性モデルが変圧器回路でも適用可能であり，より高度な電気機器の解析に有用であることが示された．

表 3 変圧器回路パラメータ

$\mu$ : 透磁率 (H/m)	図 19(a)
$\mu_r$ : 可逆透磁率 (H/m)	図 19(b)
$s$ : ヒステリシス係数 ( $\Omega/m$ )	図 19(c)
$A$ : 鎖交面積 ( $m^2$ )	$48.0 \times 10^{-6}$
$l$ : 磁路長 (m)	$75.4 \times 10^{-3}$
$N_1$ : 一次巻数	100
$N_2$ : 二次巻数	50
$R_1$ : 一次抵抗 ( $\Omega$ )	1.0
$R_2$ : 二次抵抗 ( $\Omega$ )	30,90
$r_1$ : 一次内部抵抗 ( $\Omega$ )	0.4
$r_2$ : 二次内部抵抗 ( $\Omega$ )	0.2
$\varepsilon$ : 許容誤差	$1.0 \times 10^{-9}$

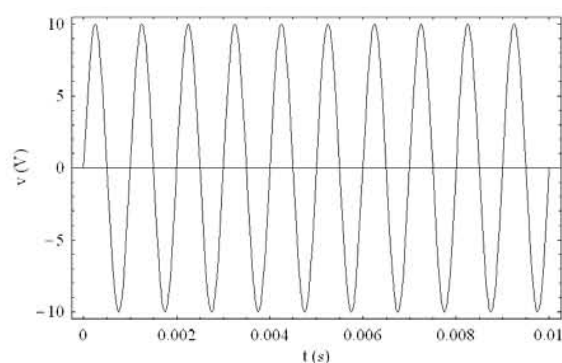
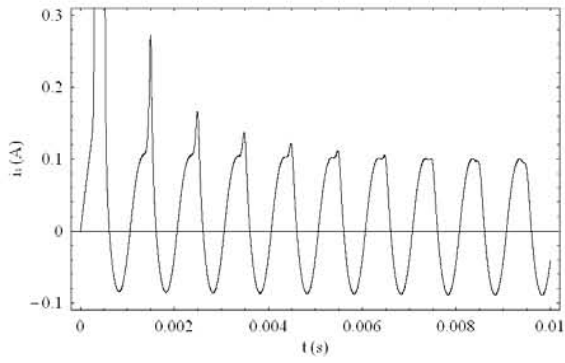
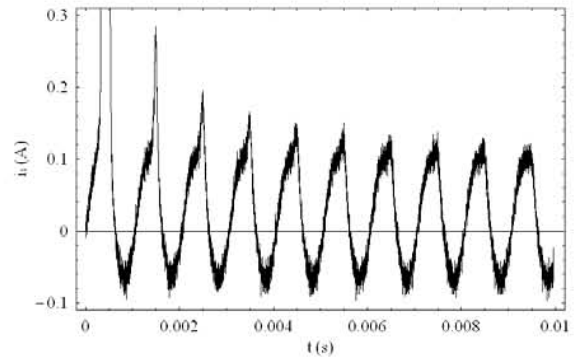


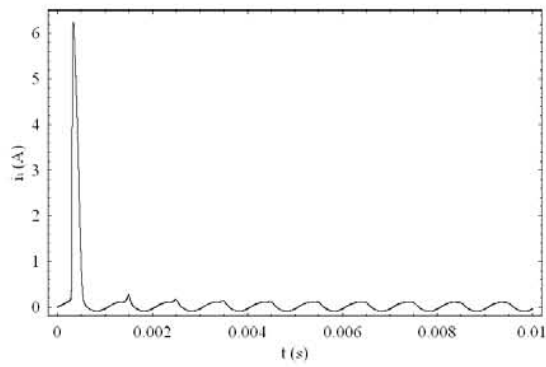
図 38 入力電圧  $v$



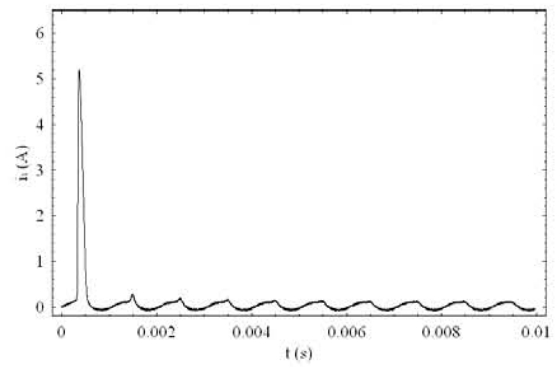
(a) 電流  $i_1$  (計算値)



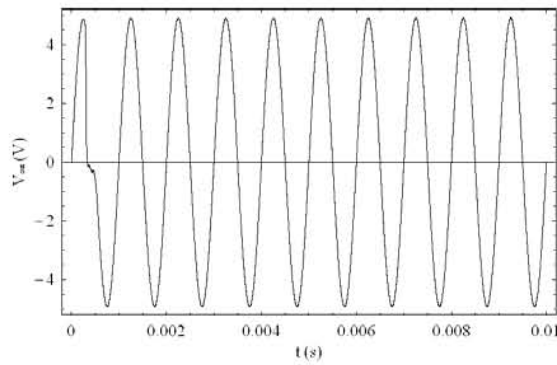
(b) 電流  $i_1$  (実験値)



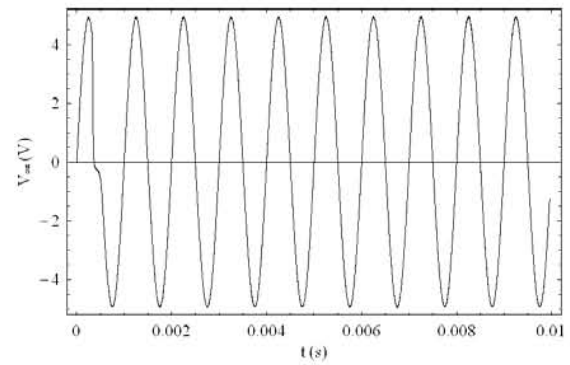
(c) 電流  $i_2$  (計算値)



(d) 電流  $i_2$  (実験値)

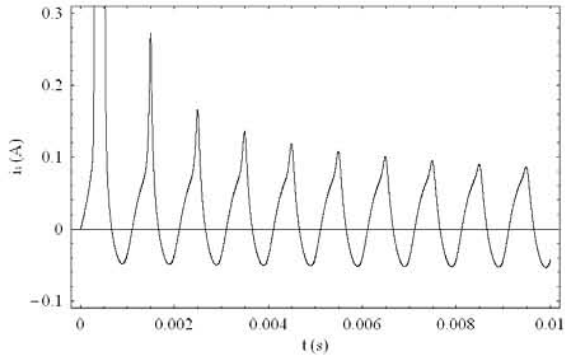


(e) 電圧  $V_{out}$  (計算値)

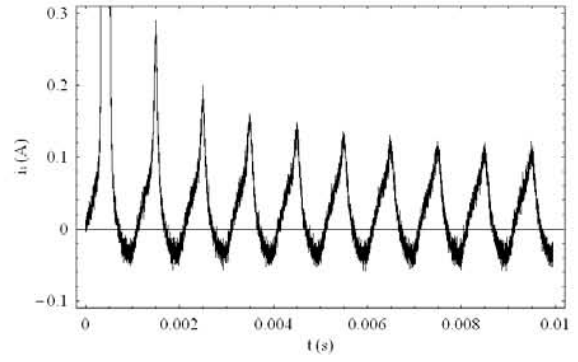


(f) 電圧  $V_{out}$  (実験値)

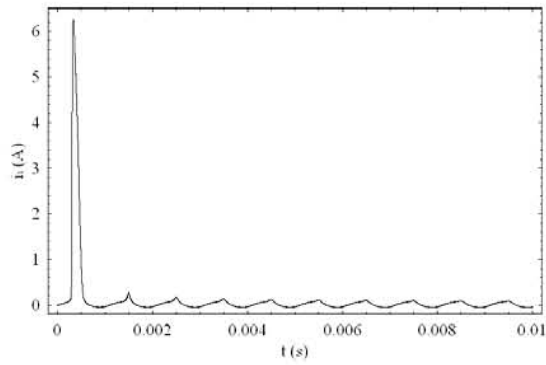
図 39 実験値と計算値 ( $30\Omega$ )



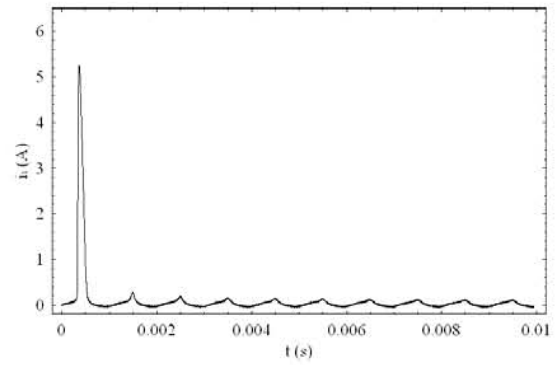
(a) 電流  $i_1$ (計算値)



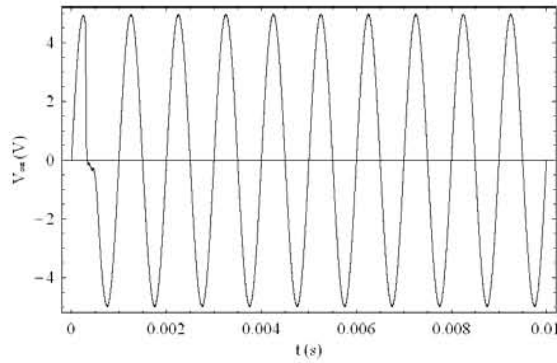
(b) 電流  $i_1$ (実験値)



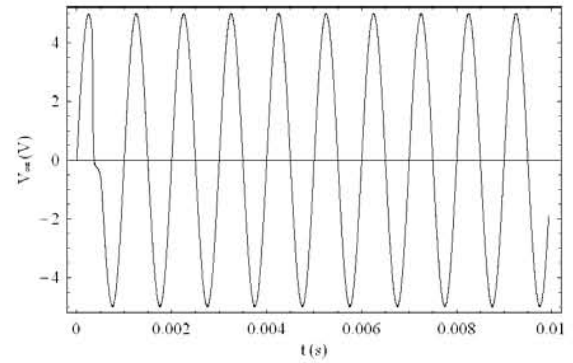
(c) 電流  $i_2$ (計算値)



(d) 電流  $i_2$ (実験値)



(e) 電圧  $V_{out}$ (計算値)



(f) 電圧  $V_{out}$ (実験値)

図 40 実験値と計算値 ( $90\Omega$ )

## 5. まとめ

本論文では、Chua 型磁化特性モデルを用いて直列鉄共振回路および並列鉄共振回路の過渡解析を行い、鉄共振現象で観察されるカオス現象に関して述べた。非線形計算の時間刻み幅ごとに計算される状態遷移行列の固有値の時間推移を3次元的に可視化した。その結果、回路はヒステリシスやカオス現象を呈している間も状態遷移行列の固有値は履歴依存性が無いことが判明した。これは、Chua 型磁化特性モデルが過去の履歴に依存しないパラメータを用いることに起因している。すなわち、予測が困難な履歴現象を呈する磁性材料を含む系の解析にはこのように過去の履歴に依存しないパラメータを用いなければならないことを示唆している。

カオス的現象を呈する系の固有値は状態に応じて変化するが、その変化は規則的でありカオスへ直接寄与しない。このため、鉄共振系のカオス的振る舞いは保磁力、すなわち、磁束密度ゼロ時の非可逆的磁区状態が鉄共振回路のカオス的振る舞いを喚起することが、系の固有値を可視化することで判明した。

また、変圧器における過渡解析を行いその結果、Chua 型磁化特性モデルが履歴現象を考慮して変圧器の動作を予測可能とすることが判明した。これは、Chua 型磁化特性モデルが磁性材料を広くに利用する電気機器の解析に極めて有効であり、その結果、変圧器やリアクトル等の磁気エネルギーを利用したDC-DCコンバータ、インバータなどのより詳細な動作予測を可能にすることを示唆している。

## 6. 参考文献

- [1] 早野誠治, “磁性材料の構成方程式に関する研究”, 法政大学学位論文 (1995-1)
- [2] Y. Saito, M. Namiki, and S. Hayano, “A Magnetization Model for Computational Magnetodynamics”, J. Appl. Phys., Vol.69, No.8, pp.4614-4616 (1991-4)
- [3] Y. Saito, S. Hayano, and Y. Sakaki, “A Parameter Representing Eddy Current Loss of Soft Magnetic Materials and Its Constitutive Equation”, J. Appl. Phys., Vol.64, No.10, pp.5684-5686 (1988-11)
- [4] R. S. Vargher, “Matrix Iterative Analysis”, Prentice-Hall, NJ (1962)
- [5] 遠藤久, 早野誠治, 齋藤兆古, “可飽和インダクタンスを含む回路解析に関する考察”, 電気学会マグネティックス研究会資料, MAG-02-139 (2002-10)
- [6] H. Endo, I. Marinova, T. Takagi, S. Hayano, and Y. Saito, “Dynamics on Ferroresonant Circuit Exhibiting Chaotic Phenomenon”, IEEE Trans. Magn, vol.40, no. 2, pp. 868-871 (2004-3)

## 研究業績

- [1] 2005年度 可視化情報学会第33回可視化情報シンポジウム  
田中祐司, 早野誠治, 齋藤兆古, 遠藤久, 堀井清之, “電気回路における非線形現象の可視化”, 可視化情報学会誌, 2005, Vol.25, Suppl. no.1, pp. 177-180 (2005-7)
- [2] 2006年度 法政大学情報メディア教育研究センター研究報告  
田中祐司, 早野誠治, 齋藤兆古, “鉄共振回路における非線形現象の可視化”, 法政大学情報メディア教育研究センター研究報告, 第19巻, pp. 143-147 (2006)
- [3] 2006年度 電気学会マグネティックス研究会(磐梯熱海)  
田中祐司, 早野誠治, 齋藤兆古, “鉄共振現象とカオス的振る舞いに関する解析”, 電気学会研究会資料 マグネティックス研究会, MAG-06-1~3・5~10, pp. 43-47 (2006-3)
- [4] 2006年度 可視化情報学会第34回可視化情報シンポジウム  
田中祐司, 齋藤兆古, 堀井清之, “磁性体に起因する非線形現象の可視化”, 可視化情報学会誌, 2006, Vol.26, Suppl. no.1, pp. 279-282 (2006-7)
- [5] 2006年度 第15回 MAGDA コンファレンス in 桐生  
田中祐司, 齋藤兆古, “磁化特性のモデリングと電気機器可視化解析への応用”, 第15回 MAGDA コンファレンス in 桐生 講演論文集, pp. 104-109 (2006-11)
- [6] 2007年度 法政大学計算科学研究センター研究報告  
田中祐司, 齋藤兆古, “電気機器における非線形現象の可視化”, 法政大学情報メディア教育研究センター研究報告, 第20巻 (2007)

## 謝辞

本研究を進めるに当たり、齋藤兆古教授、早野誠治教授には数多くのご指導、ご支援を賜りました。深く感謝致します。

また、齋藤兆古研究室の皆様、公私にわたりご助言、ご支援を賜りました。ありがとうございました。